

Tests d'entrée en microéconomie – Licence 3  
Examens de 2024 et 2025

Université Paris-Dauphine

5 mai 2026

**Table des matières**

<b>1 Énoncés des examens</b>	<b>2</b>
1.1 Sujet du 15 juin 2024 . . . . .	2
1.2 Sujet du 13 septembre 2024 . . . . .	4
1.3 Sujet de septembre 2025 . . . . .	6
<b>2 Corrigés des examens</b>	<b>7</b>
2.1 Corrigé du sujet du 15 juin 2024 . . . . .	7
2.2 Corrigé du sujet du 13 septembre 2024 . . . . .	25
2.3 Corrigé du sujet de septembre 2025 . . . . .	40
<b>3 Rappels de cours utiles à la résolution des exercices</b>	<b>56</b>
3.1 Rappels sur la théorie du consommateur . . . . .	56
3.2 Rappels sur la théorie du producteur . . . . .	61
3.3 Rappels sur la théorie de l'équilibre général en économie d'échanges . . . . .	67

# 1 Énoncés des examens

## 1.1 Sujet du 15 juin 2024

**Consignes.** Les réponses aux questions doivent être accompagnées d'un commentaire économique succinct mais précis, soulignant la logique de la démarche et des résultats.

### Exercice 1 (6 points)

1. On considère un consommateur dont les préférences portent sur deux biens notés 1 et 2. Le prix du bien 1 est égal à 2, celui du bien 2 est égal à 3. Son panier de consommation comprend des quantités strictement positives des deux biens. Pour ce panier initial, son utilité marginale du bien 1 vaut 5, tandis que son utilité marginale du bien 2 vaut 10. Ce panier de biens est-il optimal pour le consommateur ? Si non, doit-il augmenter ou diminuer sa consommation de bien 1 ? sa consommation de bien 2 ?
2. Une entreprise combine du travail et du capital pour obtenir un bien. Pour le niveau de production qu'elle a choisi, la productivité marginale du travail est égale à 4, celle du capital à 12. Si le salaire est égal à 2 et le prix du capital à 5, l'entreprise a-t-elle retenu la meilleure combinaison de travail et de capital ? Si non, que doit-elle faire ? Comment doit-elle modifier les quantités de travail et de capital ?
3. On considère deux agents  $A$  et  $B$  dont les préférences sont définies sur deux biens de consommation notés 1 et 2. Initialement, les paniers possédés par  $A$  et par  $B$  comprennent des quantités positives de chaque bien. Pour ces paniers initiaux, les utilités marginales de  $A$  sont 2 pour le bien 1 et 4 pour le bien 2. Les utilités marginales de  $B$  sont respectivement 1 pour le bien 1 et 1,5 pour le bien 2. Les agents peuvent-ils réaliser des échanges mutuellement avantageux ? Si oui, quel est le bien que doit offrir  $A$ , quel est le bien qu'il doit demander ? Quel est le bien que doit offrir  $B$ , et quel bien doit-il demander ?

### Exercice 2 (7 points)

Une entreprise combine du travail et du capital, dont les quantités sont respectivement notées  $L$  et  $K$ , pour produire un bien de consommation en utilisant une technique de production résumée par la fonction

$$Q = K^{1/4}L^{1/2}.$$

Le prix du travail est noté  $w$ , celui du capital  $r$ .

1. Donner le programme de minimisation des coûts du producteur.
2. Rappeler les conditions marginales que doivent vérifier les choix optimaux du producteur lorsqu'il minimise sa dépense.
3. Déterminer sa fonction de coût total, son coût marginal et son coût moyen.

4. Quelle est la fonction d'offre du producteur et son profit à l'équilibre ?
5. Si le salaire augmente, la part des revenus du travail dans la recette de l'entreprise va-t-elle évoluer ? Justifier votre réponse.

**Exercice 3 (7 points)**

On considère une économie d'échanges comprenant deux biens 1 et 2, ainsi que deux agents  $A$  et  $B$ , dont les préférences sont résumées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A, \quad U_B = \ln(c_1^B) + \frac{1}{2} \ln(c_2^B),$$

où  $c_1^i$  et  $c_2^i$  désignent les consommations en bien 1 et en bien 2 de l'agent  $i$ , avec  $i \in \{A, B\}$ .

Les dotations initiales des deux agents sont données par le tableau suivant :

	bien 1	bien 2
agent $A$	0	50
agent $B$	100	100

Les prix sont notés  $p_1$  et  $p_2$ . Le bien 1 est pris comme numéraire, de sorte que  $p_1 = 1$ .

1. Donner les contraintes budgétaires des deux agents.
2. Déterminer les demandes de  $A$  et de  $B$ .
3. Poser les conditions d'équilibre sur les marchés et déterminer le prix d'équilibre.
4. On redistribue les ressources entre les deux agents, qui deviennent :

	bien 1	bien 2
agent $A$	0	150
agent $B$	100	0

En refaisant si nécessaire les étapes précédentes, par le calcul ou par un raisonnement, déterminer le nouveau prix d'équilibre  $p_2$ .

## 1.2 Sujet du 13 septembre 2024

**Consignes.** Les réponses aux questions doivent être accompagnées d'un commentaire économique succinct mais précis, soulignant la logique de la démarche et des résultats.

### Exercice 1 (10 points)

Une entreprise combine le travail, la terre et le capital, dont les quantités sont respectivement notées  $L$ ,  $T$  et  $K$ , pour produire un bien de consommation en utilisant une technique de production résumée par la fonction

$$Q = T^{1/2}K^{1/4}L^{1/4}.$$

Le prix du travail est noté  $w$ , celui de la terre  $q$ , celui du capital  $r$ .

1. Donner le programme de minimisation des coûts du producteur.
2. Rappeler les conditions marginales que doivent vérifier les choix optimaux du producteur lorsqu'il minimise sa dépense.
3. Déterminer sa fonction de coût total, son coût marginal et son coût moyen.
4. Quelle est la fonction d'offre du producteur et son profit à l'équilibre ?

### Exercice 2 (10 points)

On considère une économie d'échanges comprenant deux biens 1 et 2, ainsi que deux agents  $A$  et  $B$ , dont les préférences sont :

$$U_A = c_1^A (c_2^A)^2, \quad U_B = \frac{1}{4} \ln(c_1^B) + \frac{1}{2} \ln(c_2^B).$$

Les dotations des deux agents sont :

	bien 1	bien 2
agent $A$	0	50
agent $B$	100	100

Les prix sont notés  $p_1$  et  $p_2$ . Le bien 1 est pris comme numéraire, de sorte que  $p_1 = 1$ .

1. Donner les contraintes budgétaires des deux agents.
2. Déterminer les demandes de  $A$  et de  $B$ .
3. Poser les conditions d'équilibre sur les marchés et déterminer le prix d'équilibre.

4. On redistribue les ressources entre les deux agents, qui deviennent :

	bien 1	bien 2
agent $A$	0	150
agent $B$	100	0

En refaisant si nécessaire les étapes précédentes, par le calcul ou par un raisonnement, déterminer le nouveau prix d'équilibre  $p_2$ .

### 1.3 Sujet de septembre 2025

**Consignes.** Les réponses aux questions doivent être accompagnées d'un commentaire économique succinct mais précis, soulignant la logique de la démarche et des résultats.

#### Exercice I (4 points)

**Remarque.** Justifiez vos réponses en insistant sur la logique économique.

1. On considère deux biens de consommation, le bien 1 et le bien 2, dont les prix sont notés  $p_1$  et  $p_2$ . L'utilité marginale du bien 1 est égale à 1, celle du bien 2 à 4. Le prix du bien 1 est  $p_1 = 2$  et celui du bien 2 est  $p_2 = 10$ . L'agent doit-il modifier ses consommations ? Si oui, comment ?
2. Une entreprise utilise pour produire son bien deux facteurs : le travail et le capital, dont les prix sont respectivement 1 et 10. Les productivités marginales des deux facteurs sont respectivement 10 et 60. L'entreprise peut-elle encore diminuer son coût total de production ? Si oui, comment ?

#### Exercice II (8 points)

Une entreprise combine le travail  $L$  et le capital  $K$ , dont les quantités sont respectivement notées  $L$  et  $K$ , pour produire un bien de consommation en utilisant une technique de production résumée par la fonction

$$Q = K^{1/4}L^{1/4}.$$

Le prix du travail est noté  $w$ , celui du capital  $r$ .

1. Donner le programme de minimisation des coûts du producteur.
2. Rappeler les conditions marginales que doivent vérifier les choix optimaux du producteur lorsqu'il minimise sa dépense.
3. Déterminer sa fonction de coût total, son coût marginal et son coût moyen.
4. Quelle est la fonction d'offre du producteur et son profit à l'équilibre ? Quelle est la part du profit dans le chiffre d'affaires ?

#### Exercice III (8 points)

On considère une économie d'échanges comprenant trois biens 1, 2 et 3, ainsi que deux agents  $A$  et  $B$ , dont les préférences sont :

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A, \quad U_B = \frac{1}{2} \ln(c_1^B) + \frac{1}{4} \ln(c_2^B) + \frac{1}{4} \ln(c_3^B).$$

Les dotations des deux agents sont :

	bien 1	bien 2	bien 3
agent $A$	0	100	200
agent $B$	100	100	100

Le bien 1 est pris comme numéraire, de sorte que  $p_1 = 1$ .

1. Donner les contraintes budgétaires des deux agents.
2. Déterminer les demandes de  $A$  et de  $B$ .
3. Poser les conditions d'équilibre sur les marchés et déterminer les prix d'équilibre.
4. Un transfert de revenu d'un montant  $T$  est mis en place au profit de l'agent  $A$ , au détriment de l'agent  $B$ . Quel sera son impact sur les prix ? Expliquer succinctement pourquoi.

## 2 Corrigés des examens

### 2.1 Corrigé du sujet du 15 juin 2024

#### Exercice 1

**Question 1.** On considère un consommateur qui choisit ses quantités  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$ , face aux prix

$$p_1 = 2 \quad \text{et} \quad p_2 = 3.$$

Pour le panier initial considéré, les utilités marginales sont

$$Um_1 = 5 \quad \text{et} \quad Um_2 = 10.$$

**Rappel de cours.** Lorsque le consommateur consomme des quantités strictement positives des deux biens, on est dans un *optimum intérieur*. La condition marginale d'optimalité s'écrit alors sous l'une des deux formes équivalentes :

$$\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} \quad \Longleftrightarrow \quad TMS_{1,2} = \frac{p_1}{p_2},$$

où

$$TMS_{1,2} = \frac{Um_1}{Um_2}.$$

L'interprétation économique est la suivante :

—  $\frac{Um_i}{p_i}$  mesure le *gain d'utilité procuré par un euro supplémentaire dépensé en bien  $i$*  ;

- à l'optimum, le dernier euro dépensé dans chacun des biens doit rapporter le même supplément d'utilité ;
- sinon, le consommateur peut réallouer sa dépense au profit du bien qui procure la plus forte utilité marginale par euro dépensé.

**Calcul.** On calcule :

$$\frac{Um_1}{p_1} = \frac{5}{2} = 2,5, \quad \frac{Um_2}{p_2} = \frac{10}{3} \approx 3,33.$$

Ces deux rapports ne sont pas égaux. Le panier initial **n'est donc pas optimal**.

De plus,

$$\frac{Um_2}{p_2} > \frac{Um_1}{p_1}.$$

Autrement dit, à dépense supplémentaire identique, le bien 2 procure plus d'utilité que le bien 1. Le consommateur a donc intérêt à **réduire sa consommation du bien 1** et à **augmenter sa consommation du bien 2**.

On peut également raisonner à partir du taux marginal de substitution :

$$TMS_{1,2} = \frac{Um_1}{Um_2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Or

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{3}.$$

Comme

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3},$$

la condition d'optimalité n'est pas satisfaite. Plus précisément,

$$TMS_{1,2} < \frac{p_1}{p_2}.$$

Le consommateur est donc prêt à céder relativement peu de bien 2 pour obtenir une unité supplémentaire de bien 1, comparativement à ce qu'impose le marché. Le bien 1 est donc, relativement au bien 2, *insuffisamment désirable* dans le panier actuel. Il convient donc de **substituer du bien 2 au bien 1**.

**Conclusion.** Le panier initial n'est pas optimal. Le consommateur doit :

diminuer sa consommation du bien 1 et augmenter sa consommation du bien 2.

**Question 2.** Une entreprise utilise du travail et du capital. Pour la combinaison productive actuellement retenue, on sait que

$$Pm_L = 4, \quad Pm_K = 12, \quad w = 2, \quad r = 5.$$

**Rappel de cours.** Lorsque l'entreprise cherche à *minimiser le coût* d'un niveau de production donné, et lorsque les deux facteurs sont utilisés en quantités strictement positives, la condition marginale d'optimalité s'écrit :

$$\frac{Pm_L}{w} = \frac{Pm_K}{r}.$$

Cette égalité signifie qu'à l'optimum, *un euro dépensé en travail* doit procurer le même supplément de production qu'*un euro dépensé en capital*.

Cette condition peut aussi s'écrire

$$TMST_{L,K} = \frac{w}{r},$$

où

$$TMST_{L,K} = \frac{Pm_L}{Pm_K}.$$

L'interprétation est celle de la tangence entre l'isoquante et l'isocoût.

**Calcul.** On compare les productivités marginales par euro dépensé :

$$\frac{Pm_L}{w} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{Pm_K}{r} = \frac{12}{5} = 2,4.$$

On obtient

$$\frac{Pm_K}{r} > \frac{Pm_L}{w}.$$

Donc un euro supplémentaire consacré au capital augmente davantage la production qu'un euro supplémentaire consacré au travail. La combinaison actuelle n'est donc **pas** la combinaison minimisant le coût.

**Interprétation économique.** À production donnée, l'entreprise peut réduire son coût en :

- **augmentant la quantité de capital,**
- **diminuant la quantité de travail.**

En effet, tant que le capital apporte plus de production par euro dépensé que le travail, il est rentable de substituer du capital au travail.

On peut vérifier le même résultat via le taux marginal de substitution technique :

$$TMST_{L,K} = \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad \frac{w}{r} = \frac{2}{5}.$$

Comme

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{5},$$

la condition de tangence n'est pas satisfaite. On retrouve donc la même conclusion.

**Conclusion.** L'entreprise n'a pas choisi la meilleure combinaison productive. Elle doit :

augmenter le capital et diminuer le travail.

**Question 3.** Deux agents  $A$  et  $B$  échangent deux biens 1 et 2. Pour leurs paniers initiaux, les utilités marginales sont :

$$\begin{aligned}Um_1^A &= 2, & Um_2^A &= 4, \\Um_1^B &= 1, & Um_2^B &= 1,5.\end{aligned}$$

Les deux agents possèdent initialement des quantités strictement positives des deux biens.

**Rappel de cours.** Dans une économie d'échanges, tant que les deux agents disposent de quantités positives des deux biens, des échanges mutuellement avantageux sont possibles dès lors que leurs taux marginaux de substitution diffèrent :

$$TMS_{1,2}^A \neq TMS_{1,2}^B.$$

En effet, si les évaluations marginales relatives des deux biens sont différentes, il existe un rapport d'échange compris entre les deux TMS qui améliore la situation des deux agents.

**Calcul des TMS.** Pour l'agent  $A$ ,

$$TMS_{1,2}^A = \frac{Um_1^A}{Um_2^A} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pour l'agent  $B$ ,

$$TMS_{1,2}^B = \frac{Um_1^B}{Um_2^B} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}.$$

Comme

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3},$$

les évaluations marginales relatives diffèrent. Il existe donc des **échanges mutuellement avantageux**.

**Sens de l'échange.** Le TMS mesure ici la quantité de bien 2 que l'agent est prêt à céder pour obtenir une unité supplémentaire de bien 1.

- L'agent  $A$  est prêt à céder jusqu'à  $\frac{1}{2}$  unité de bien 2 pour obtenir une unité de bien 1.
- L'agent  $B$  est prêt à céder jusqu'à  $\frac{2}{3}$  unité de bien 2 pour obtenir une unité de bien 1.

Ainsi, l'agent  $B$  valorise relativement davantage le bien 1 que l'agent  $A$ . Symétriquement, l'agent  $A$  valorise relativement davantage le bien 2 que l'agent  $B$ .

Par conséquent :

- l'agent  $A$  a intérêt à **offrir du bien 1** et à **demander du bien 2** ;
- l'agent  $B$  a intérêt à **offrir du bien 2** et à **demander du bien 1**.

**Conclusion.** Des échanges mutuellement avantageux sont possibles, et leur sens est :

$A$  offre du bien 1 et demande du bien 2,  
 $B$  offre du bien 2 et demande du bien 1.

---

## Exercice 2

On considère une entreprise qui produit selon la technologie

$$Q = K^{1/4}L^{1/2},$$

où  $K$  désigne le capital et  $L$  le travail. Le prix du travail est  $w$ , celui du capital est  $r$ .

**Question 1. Programme de minimisation des coûts.** Pour produire un niveau donné  $\bar{Q} > 0$ , l'entreprise cherche à minimiser sa dépense totale sous la contrainte de produire au moins  $\bar{Q}$ .

Le programme de minimisation des coûts s'écrit donc :

$$\min_{L \geq 0, K \geq 0} wL + rK$$

sous la contrainte

$$K^{1/4}L^{1/2} \geq \bar{Q}.$$

**Rappel de cours.** Comme la fonction de production est croissante en chacun des facteurs, il n'est jamais optimal de produire strictement plus que le niveau requis dans un programme de minimisation des coûts. La contrainte technologique est donc saturée à l'optimum :

$$K^{1/4}L^{1/2} = \bar{Q}.$$

Ainsi, on peut réécrire le programme sous la forme

$$\min_{L \geq 0, K \geq 0} wL + rK \quad \text{sous} \quad K^{1/4}L^{1/2} = \bar{Q}.$$

**Question 2. Conditions marginales d'optimalité.** On forme le lagrangien :

$$\mathcal{L}(L, K, \lambda) = wL + rK + \lambda (\bar{Q} - K^{1/4}L^{1/2}).$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \lambda \frac{1}{2} K^{1/4} L^{-1/2} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \lambda \frac{1}{4} K^{-3/4} L^{1/2} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \bar{Q} - K^{1/4} L^{1/2} = 0.$$

On en déduit

$$w = \lambda \frac{1}{2} K^{1/4} L^{-1/2}, \quad r = \lambda \frac{1}{4} K^{-3/4} L^{1/2}.$$

**Rappel de cours.** À l'optimum intérieur, il faut que la productivité marginale par euro dépensé soit la même pour tous les facteurs :

$$\frac{Pm_L}{w} = \frac{Pm_K}{r}.$$

Ici,

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{2} K^{1/4} L^{-1/2}, \quad Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{4} K^{-3/4} L^{1/2}.$$

La condition de tangence s'écrit donc :

$$\frac{\frac{1}{2} K^{1/4} L^{-1/2}}{w} = \frac{\frac{1}{4} K^{-3/4} L^{1/2}}{r}.$$

De manière équivalente,

$$\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{w}{r}.$$

**Simplification de la condition de tangence.** En divisant la première équation par la seconde, on obtient :

$$\frac{w}{r} = \frac{\frac{1}{2} K^{1/4} L^{-1/2}}{\frac{1}{4} K^{-3/4} L^{1/2}} = 2 K^{1/4+3/4} L^{-1/2-1/2} = 2 \frac{K}{L}.$$

Donc

$$\frac{w}{r} = 2 \frac{K}{L}.$$

On peut réécrire cette relation sous les formes :

$$K = \frac{w}{2r} L \quad \text{ou} \quad L = \frac{2r}{w} K.$$

Cette relation donne la *proportion optimale* entre travail et capital.

**Question 3. Fonction de coût total, coût marginal et coût moyen. Étape 1 : détermination des demandes conditionnelles de facteurs.**

À partir de

$$L = \frac{2r}{w}K,$$

on remplace dans la contrainte de production :

$$\bar{Q} = K^{1/4}L^{1/2} = K^{1/4} \left( \frac{2r}{w}K \right)^{1/2}.$$

D'où

$$\bar{Q} = K^{1/4} \left( \frac{2r}{w} \right)^{1/2} K^{1/2} = \left( \frac{2r}{w} \right)^{1/2} K^{3/4}.$$

Ainsi,

$$K^{3/4} = \bar{Q} \left( \frac{w}{2r} \right)^{1/2}.$$

On élève alors les deux membres à la puissance  $4/3$  :

$$K = \left[ \bar{Q} \left( \frac{w}{2r} \right)^{1/2} \right]^{4/3}.$$

Donc

$$K^*(\bar{Q}, w, r) = \bar{Q}^{4/3} \left( \frac{w}{2r} \right)^{2/3}.$$

Puis

$$L^*(\bar{Q}, w, r) = \frac{2r}{w} K^*(\bar{Q}, w, r) = \frac{2r}{w} \bar{Q}^{4/3} \left( \frac{w}{2r} \right)^{2/3}.$$

On simplifie :

$$L^*(\bar{Q}, w, r) = \bar{Q}^{4/3} \left( \frac{2r}{w} \right)^{1/3}.$$

On a donc les demandes conditionnelles de facteurs :

$$\boxed{K^*(\bar{Q}, w, r) = \bar{Q}^{4/3} \left( \frac{w}{2r} \right)^{2/3}}, \quad \boxed{L^*(\bar{Q}, w, r) = \bar{Q}^{4/3} \left( \frac{2r}{w} \right)^{1/3}}.$$

## Étape 2 : fonction de coût total.

Par définition,

$$C(\bar{Q}, w, r) = wL^*(\bar{Q}, w, r) + rK^*(\bar{Q}, w, r).$$

Calculons chaque terme séparément.

D'abord,

$$wL^* = w\bar{Q}^{4/3} \left( \frac{2r}{w} \right)^{1/3} = \bar{Q}^{4/3} w^{1-1/3} (2r)^{1/3} = \bar{Q}^{4/3} 2^{1/3} w^{2/3} r^{1/3}.$$

Ensuite,

$$rK^* = r\bar{Q}^{4/3} \left( \frac{w}{2r} \right)^{2/3} = \bar{Q}^{4/3} r^{1-2/3} w^{2/3} 2^{-2/3} = \bar{Q}^{4/3} 2^{-2/3} w^{2/3} r^{1/3}.$$

En additionnant,

$$C(\bar{Q}, w, r) = \bar{Q}^{4/3} w^{2/3} r^{1/3} (2^{1/3} + 2^{-2/3}).$$

Or

$$2^{1/3} + 2^{-2/3} = 2^{-2/3}(2 + 1) = 3 \cdot 2^{-2/3}.$$

Donc

$$C(\bar{Q}, w, r) = \frac{3}{2^{2/3}} w^{2/3} r^{1/3} \bar{Q}^{4/3}.$$

### Étape 3 : coût marginal.

Le coût marginal est la dérivée du coût total par rapport à la production :

$$Cm(\bar{Q}) = \frac{\partial C}{\partial \bar{Q}}.$$

On dérive :

$$Cm(\bar{Q}) = \frac{3}{2^{2/3}} w^{2/3} r^{1/3} \cdot \frac{4}{3} \bar{Q}^{1/3}.$$

Par simplification,

$$Cm(\bar{Q}) = 2^{4/3} w^{2/3} r^{1/3} \bar{Q}^{1/3}.$$

### Étape 4 : coût moyen.

Le coût moyen est

$$CM(\bar{Q}) = \frac{C(\bar{Q})}{\bar{Q}}.$$

Donc

$$CM(\bar{Q}) = \frac{3}{2^{2/3}} w^{2/3} r^{1/3} \bar{Q}^{1/3}.$$

Ainsi,

$$CM(\bar{Q}) = \frac{3}{2^{2/3}} w^{2/3} r^{1/3} \bar{Q}^{1/3}.$$

On remarque que

$$Cm(\bar{Q}) = \frac{4}{3} CM(\bar{Q}).$$

Le coût marginal est donc supérieur au coût moyen, ce qui reflète ici les *rendements décroissants* à l'échelle, puisque

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1.$$

**Question 4. Fonction d'offre et profit à l'équilibre.** Sous concurrence pure et parfaite, l'entreprise prend le prix du bien  $p$  comme donné et choisit sa production  $Q$  de manière à maximiser son profit :

$$\max_{Q \geq 0} \pi(Q) = pQ - C(Q, w, r).$$

Ici,

$$\pi(Q) = pQ - \frac{3}{2^{2/3}}w^{2/3}r^{1/3}Q^{4/3}.$$

**Condition du premier ordre.** Pour un optimum intérieur,

$$\frac{d\pi}{dQ} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p = Cm(Q).$$

Donc

$$p = 2^{4/3}w^{2/3}r^{1/3}Q^{1/3}.$$

On élève au cube :

$$p^3 = 2^4w^2rQ = 16w^2rQ.$$

Ainsi,

$$Q^s(p, w, r) = \frac{p^3}{16w^2r}.$$

Cette fonction d'offre est croissante en  $p$ , décroissante en  $w$  et en  $r$ , ce qui est conforme à l'intuition économique.

**Profit à l'équilibre.** On remplace  $Q^s$  dans la fonction de profit :

$$\pi^*(p, w, r) = pQ^s - C(Q^s, w, r).$$

Calculons d'abord la recette :

$$pQ^s = p \cdot \frac{p^3}{16w^2r} = \frac{p^4}{16w^2r}.$$

Calculons ensuite le coût total au niveau optimal. Comme

$$Q^s = \frac{p^3}{16w^2r},$$

on a

$$(Q^s)^{4/3} = \left(\frac{p^3}{16w^2r}\right)^{4/3} = \frac{p^4}{16^{4/3}w^{8/3}r^{4/3}} = \frac{p^4}{2^{16/3}w^{8/3}r^{4/3}}.$$

Par conséquent,

$$C(Q^s, w, r) = \frac{3}{2^{2/3}}w^{2/3}r^{1/3} \cdot \frac{p^4}{2^{16/3}w^{8/3}r^{4/3}} = \frac{3p^4}{2^{18/3}w^2r} = \frac{3p^4}{64w^2r}.$$

On obtient donc

$$\pi^*(p, w, r) = \frac{p^4}{16w^2r} - \frac{3p^4}{64w^2r} = \frac{4p^4 - 3p^4}{64w^2r}.$$

Ainsi,

$$\pi^*(p, w, r) = \frac{p^4}{64w^2r}.$$

On peut aussi présenter ce résultat sous une forme plus simple. À l'optimum, puisque

$$p = Cm(Q) = \frac{4}{3} \frac{C(Q)}{Q},$$

on obtient

$$pQ = \frac{4}{3}C(Q) \quad \implies \quad \pi = pQ - C(Q) = \frac{1}{4}pQ.$$

Ainsi,

$$\boxed{\pi^* = \frac{1}{4}pQ^*}.$$

**Interprétation.** Le profit est ici positif. Cela vient du fait que la technologie présente des rendements décroissants à l'échelle, si bien que le coût marginal est croissant et que le prix d'équilibre concurrentiel excède le coût moyen.

**Question 5. Effet d'une hausse du salaire sur la part des revenus du travail dans la recette.** On cherche à savoir comment évolue

$$\frac{wL}{pQ}.$$

**Méthode la plus directe : partir des conditions de premier ordre du programme de profit.**

Le programme de maximisation du profit en facteurs s'écrit :

$$\max_{L \geq 0, K \geq 0} pK^{1/4}L^{1/2} - wL - rK.$$

Les conditions de premier ordre sont :

$$p \frac{\partial Q}{\partial L} = w, \quad p \frac{\partial Q}{\partial K} = r.$$

Or

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{2}K^{1/4}L^{-1/2}.$$

Donc

$$w = p \cdot \frac{1}{2}K^{1/4}L^{-1/2}.$$

En multipliant par  $L$ , on obtient :

$$wL = p \cdot \frac{1}{2}K^{1/4}L^{-1/2} \cdot L = p \cdot \frac{1}{2}K^{1/4}L^{1/2} = \frac{pQ}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{wL}{pQ} = \frac{1}{2}}.$$

Cette part est donc **constante** : elle ne dépend ni de  $w$ , ni de  $r$ , ni de  $p$ .

**Conclusion.** Si le salaire augmente, la part des revenus du travail dans la recette **ne change pas**. Elle demeure égale à

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

**Interprétation économique.** Avec une technologie de type Cobb–Douglas, les parts factorielles dans la recette sont constantes. Une hausse du salaire modifie les quantités optimales de facteurs, mais ces ajustements sont précisément tels que la part du travail dans le chiffre d'affaires reste inchangée.

---

### Exercice 3

On considère une économie d'échanges à deux biens, 1 et 2, et deux agents  $A$  et  $B$ . Les préférences sont données par

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A, \quad U_B = \ln(c_1^B) + \frac{1}{2} \ln(c_2^B).$$

Les dotations initiales sont

$$\omega^A = (0, 50), \quad \omega^B = (100, 100).$$

Le bien 1 est le numéraire :

$$p_1 = 1, \quad p_2 > 0.$$

**Question 1. Contraintes budgétaires. Rappel de cours.** Dans une économie d'échanges, la contrainte budgétaire de l'agent  $i$  s'écrit :

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i.$$

Autrement dit :

$$\text{valeur des emplois} \leq \text{valeur des ressources}.$$

Ici, les *emplois* sont les dépenses de consommation, et les *ressources* sont la valeur au prix de marché des dotations initiales.

Lorsque les préférences sont localement non saturées, ce qui est le cas ici, l'inégalité budgétaire est saturée à l'optimum :

$$p \cdot c^i = p \cdot \omega^i.$$

**Agent A.** La valeur de sa dotation est

$$m_A = p_1 \omega_1^A + p_2 \omega_2^A = 1 \cdot 0 + p_2 \cdot 50 = 50p_2.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^A + p_2 c_2^A \leq 50p_2.$$

À l'optimum :

$$\boxed{c_1^A + p_2 c_2^A = 50p_2.}$$

**Agent B.** La valeur de sa dotation est

$$m_B = p_1 \omega_1^B + p_2 \omega_2^B = 100 + 100p_2.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^B + p_2 c_2^B \leq 100 + 100p_2.$$

À l'optimum :

$$\boxed{c_1^B + p_2 c_2^B = 100 + 100p_2.}$$

**Question 2. Demandes de A et de B. Rappel de cours.** Dans un problème de demande walrassienne :

- les demandes sont homogènes de degré 0 en prix et revenu ;
- autrement dit, si l'on multiplie tous les prix et le revenu par un même scalaire strictement positif, les demandes ne changent pas ;
- c'est l'expression formelle de l'*absence d'illusion monétaire* : seuls les prix relatifs et le pouvoir d'achat réel importent.

Le choix du bien 1 comme numéraire, c'est-à-dire  $p_1 = 1$ , ne modifie donc pas les allocations réelles ; il fixe seulement l'unité monétaire.

**Demande de l'agent A.**

L'agent A résout

$$\max_{c_1^A, c_2^A \geq 0} (c_1^A)^2 c_2^A$$

sous la contrainte

$$c_1^A + p_2 c_2^A = 50p_2.$$

Comme les préférences sont strictement croissantes, la contrainte budgétaire est saturée.

Formons le lagrangien :

$$\mathcal{L}_A = (c_1^A)^2 c_2^A + \lambda_A (50p_2 - c_1^A - p_2 c_2^A).$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial c_1^A} = 2c_1^A c_2^A - \lambda_A = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial c_2^A} = (c_1^A)^2 - \lambda_A p_2 = 0,$$

$$50p_2 - c_1^A - p_2 c_2^A = 0.$$

Des deux premières équations, on tire :

$$\lambda_A = 2c_1^A c_2^A, \quad \lambda_A = \frac{(c_1^A)^2}{p_2}.$$

En les égalisant :

$$2c_1^A c_2^A = \frac{(c_1^A)^2}{p_2}.$$

Comme on est à l'optimum intérieur,  $c_1^A > 0$ , donc on peut diviser par  $c_1^A$  :

$$2c_2^A = \frac{c_1^A}{p_2}.$$

On obtient

$$c_1^A = 2p_2 c_2^A.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire :

$$2p_2 c_2^A + p_2 c_2^A = 50p_2.$$

Donc

$$3p_2 c_2^A = 50p_2.$$

Comme  $p_2 > 0$ , on divise par  $p_2$  :

$$3c_2^A = 50.$$

Ainsi,

$$c_2^A = \frac{50}{3}.$$

Puis

$$c_1^A = 2p_2 \frac{50}{3} = \frac{100}{3} p_2.$$

Les demandes walrassiennes de  $A$  sont donc :

$$\boxed{c_1^A(p_2) = \frac{100}{3} p_2, \quad c_2^A(p_2) = \frac{50}{3}.$$

**Demande de l'agent  $B$ .**

L'agent  $B$  résout

$$\max_{c_1^B, c_2^B > 0} \ln(c_1^B) + \frac{1}{2} \ln(c_2^B)$$

sous la contrainte

$$c_1^B + p_2 c_2^B = 100 + 100p_2.$$

Le lagrangien est

$$\mathcal{L}_B = \ln(c_1^B) + \frac{1}{2} \ln(c_2^B) + \lambda_B (100 + 100p_2 - c_1^B - p_2 c_2^B).$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial c_1^B} = \frac{1}{c_1^B} - \lambda_B = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial c_2^B} = \frac{1}{2c_2^B} - \lambda_B p_2 = 0,$$

$$100 + 100p_2 - c_1^B - p_2 c_2^B = 0.$$

Des deux premières conditions, on tire :

$$\lambda_B = \frac{1}{c_1^B}, \quad \lambda_B = \frac{1}{2p_2 c_2^B}.$$

En les égalisant :

$$\frac{1}{c_1^B} = \frac{1}{2p_2 c_2^B}.$$

Donc

$$c_1^B = 2p_2 c_2^B.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire :

$$2p_2 c_2^B + p_2 c_2^B = 100 + 100p_2.$$

Ainsi,

$$3p_2 c_2^B = 100 + 100p_2,$$

d'où

$$c_2^B = \frac{100 + 100p_2}{3p_2}.$$

Puis

$$c_1^B = 2p_2 c_2^B = \frac{2(100 + 100p_2)}{3}.$$

Les demandes walrassiennes de  $B$  sont donc :

$$\boxed{c_1^B(p_2) = \frac{2(100 + 100p_2)}{3}, \quad c_2^B(p_2) = \frac{100 + 100p_2}{3p_2}.}$$

**Question 3. Conditions d'équilibre général et prix d'équilibre. Rappel de cours.** Un équilibre général walrassien est un vecteur de prix et une allocation tels que :

1. chaque agent maximise son utilité sous sa contrainte budgétaire ;
2. tous les marchés sont équilibrés.

L'équilibre sur les marchés s'écrit ici :

$$c_1^A + c_1^B = \omega_1^A + \omega_1^B = 100,$$

$$c_2^A + c_2^B = \omega_2^A + \omega_2^B = 150.$$

**Loi de Walras.** Si chaque agent respecte sa contrainte budgétaire avec égalité, alors la demande excédentaire agrégée  $z(p)$  vérifie

$$p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) = 0.$$

Comme  $p_1 = 1$ , cela devient

$$z_1(p) + p_2 z_2(p) = 0.$$

Par conséquent, si un marché est à l'équilibre, l'autre l'est automatiquement. Il suffit donc de résoudre une seule condition d'équilibre.

**Calcul du prix d'équilibre à partir du marché du bien 1.**

On impose

$$c_1^A + c_1^B = 100.$$

En remplaçant par les demandes :

$$\frac{100}{3} p_2 + \frac{2(100 + 100p_2)}{3} = 100.$$

On multiplie par 3 :

$$100p_2 + 2(100 + 100p_2) = 300.$$

On développe :

$$100p_2 + 200 + 200p_2 = 300.$$

Donc

$$300p_2 + 200 = 300,$$

puis

$$300p_2 = 100.$$

Ainsi,

$$\boxed{p_2^* = \frac{1}{3}}.$$

### Vérification sur le marché du bien 2.

On a

$$c_2^A = \frac{50}{3}, \quad c_2^B = \frac{100 + 100p_2}{3p_2}.$$

En  $p_2 = \frac{1}{3}$ ,

$$c_2^B = \frac{100 + 100/3}{1} = \frac{400}{3}.$$

Donc

$$c_2^A + c_2^B = \frac{50}{3} + \frac{400}{3} = \frac{450}{3} = 150.$$

Le marché du bien 2 est bien équilibré.

**Conclusion.** Le prix relatif d'équilibre est

$$p_2^* = \frac{1}{3}.$$

Comme  $p_1 = 1$ , le vecteur de prix d'équilibre est

$$(p_1^*, p_2^*) = \left(1, \frac{1}{3}\right).$$

**Remarque conceptuelle.** Cet équilibre est bien déterminé uniquement en termes *réels*. Le choix de  $p_1 = 1$  ne fait que normaliser l'échelle nominale des prix. Cela reflète l'homogénéité de degré 0 des demandes et l'absence d'illusion monétaire.

**Question 4. Nouvelle redistribution des dotations et nouveau prix d'équilibre.** Les nouvelles dotations sont :

$$\omega'^A = (0, 150), \quad \omega'^B = (100, 0).$$

#### Étape 1 : nouvelles contraintes budgétaires.

Pour A,

$$m'_A = 0 + 150p_2 = 150p_2,$$

donc

$$c_1^A + p_2 c_2^A = 150p_2.$$

Pour B,

$$m'_B = 100 + 0 = 100,$$

donc

$$c_1^B + p_2 c_2^B = 100.$$

#### Étape 2 : nouvelles demandes.

Comme les préférences sont inchangées, les règles de demande gardent la même structure.

Pour  $A$ , la relation d'optimalité est toujours

$$c_1^A = 2p_2c_2^A.$$

En la remplaçant dans le budget :

$$2p_2c_2^A + p_2c_2^A = 150p_2,$$

soit

$$3p_2c_2^A = 150p_2.$$

Donc

$$c_2^A = 50, \quad c_1^A = 100p_2.$$

Pour  $B$ , la relation d'optimalité est toujours

$$c_1^B = 2p_2c_2^B.$$

En la remplaçant dans le budget :

$$2p_2c_2^B + p_2c_2^B = 100,$$

donc

$$3p_2c_2^B = 100.$$

Ainsi,

$$c_2^B = \frac{100}{3p_2}, \quad c_1^B = \frac{200}{3}.$$

Les nouvelles demandes sont donc :

$$\boxed{c_1^A = 100p_2, \quad c_2^A = 50,}$$

$$\boxed{c_1^B = \frac{200}{3}, \quad c_2^B = \frac{100}{3p_2}.}$$

### Étape 3 : équilibre de marché.

Les ressources agrégées n'ont pas changé :

$$\omega^A + \omega^B = (100, 150).$$

On impose l'équilibre sur le marché du bien 1 :

$$c_1^A + c_1^B = 100.$$

Donc

$$100p_2 + \frac{200}{3} = 100.$$

Ainsi,

$$100p_2 = 100 - \frac{200}{3} = \frac{100}{3}.$$

On obtient

$$p_2^* = \frac{1}{3}.$$

**Conclusion.** Après redistribution des ressources, le nouveau prix d'équilibre est inchangé :

$$p_2^* = \frac{1}{3}.$$

**Interprétation économique.** Ce résultat peut s'expliquer sans recalcul complet. Les deux agents consacrent toujours la même part de leur revenu à chaque bien :

$$\text{part du revenu consacrée au bien 1} = \frac{2}{3}, \quad \text{part du revenu consacrée au bien 2} = \frac{1}{3}.$$

Dès lors, la demande agrégée ne dépend que du *revenu total* de l'économie, c'est-à-dire de la valeur de la dotation agrégée, et non de sa répartition entre agents. Or la dotation agrégée demeure

$$(100, 150).$$

Le prix d'équilibre ne change donc pas.

**Remarque finale.** On retrouve ici une propriété importante de certaines économies d'échanges : lorsque les préférences induisent les mêmes parts budgétaires, une redistribution des dotations individuelles peut laisser inchangés les prix d'équilibre, dès lors que les ressources agrégées sont inchangées.

### Réponse finale pour l'exercice 3.

Contraintes budgétaires initiales :	$c_1^A + p_2 c_2^A = 50p_2, \quad c_1^B + p_2 c_2^B = 100 + 100p_2,$
Demandes initiales :	$c_1^A = \frac{100}{3}p_2, \quad c_2^A = \frac{50}{3},$ $c_1^B = \frac{2(100 + 100p_2)}{3}, \quad c_2^B = \frac{100 + 100p_2}{3p_2},$
Prix d'équilibre initial :	$p_2^* = \frac{1}{3},$
Après redistribution :	$c_1^A = 100p_2, \quad c_2^A = 50, \quad c_1^B = \frac{200}{3}, \quad c_2^B = \frac{100}{3p_2},$
Nouveau prix d'équilibre :	$p_2^* = \frac{1}{3}.$

## 2.2 Corrigé du sujet du 13 septembre 2024

### Exercice 1

On considère une entreprise qui produit un bien selon la technologie

$$Q = T^{1/2}K^{1/4}L^{1/4},$$

où  $L$  désigne le travail,  $T$  la terre et  $K$  le capital. Les prix des facteurs sont respectivement

$$w \text{ pour le travail, } \quad q \text{ pour la terre, } \quad r \text{ pour le capital.}$$

**Question 1. Programme de minimisation des coûts.** Pour produire une quantité donnée  $\bar{Q} > 0$ , l'entreprise choisit  $L$ ,  $T$  et  $K$  de façon à minimiser son coût total.

Le programme de minimisation des coûts s'écrit donc :

$$\min_{L \geq 0, T \geq 0, K \geq 0} wL + qT + rK$$

sous la contrainte technologique

$$T^{1/2}K^{1/4}L^{1/4} \geq \bar{Q}.$$

**Rappel de cours.** Dans un programme de minimisation des coûts, si la fonction de production est croissante en chacun des facteurs, il n'est jamais optimal de produire strictement plus que le niveau requis. En effet, une production excédentaire impliquerait une dépense inutile. La contrainte technologique est donc *saturée* à l'optimum :

$$T^{1/2}K^{1/4}L^{1/4} = \bar{Q}.$$

On peut ainsi réécrire le programme sous la forme

$$\min_{L \geq 0, T \geq 0, K \geq 0} wL + qT + rK \quad \text{sous} \quad T^{1/2}K^{1/4}L^{1/4} = \bar{Q}.$$

**Question 2. Conditions marginales d'optimalité. Étape 1 : écriture du lagrangien.**

On introduit le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et l'on écrit :

$$\mathcal{L}(L, T, K, \lambda) = wL + qT + rK + \lambda \left( \bar{Q} - T^{1/2}K^{1/4}L^{1/4} \right).$$

**Étape 2 : calcul des dérivées partielles.**

Les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= w - \lambda \frac{1}{4} T^{1/2} K^{1/4} L^{-3/4} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} &= q - \lambda \frac{1}{2} T^{-1/2} K^{1/4} L^{1/4} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} &= r - \lambda \frac{1}{4} T^{1/2} K^{-3/4} L^{1/4} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \bar{Q} - T^{1/2} K^{1/4} L^{1/4} = 0.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}w &= \lambda \frac{1}{4} T^{1/2} K^{1/4} L^{-3/4}, \\ q &= \lambda \frac{1}{2} T^{-1/2} K^{1/4} L^{1/4}, \\ r &= \lambda \frac{1}{4} T^{1/2} K^{-3/4} L^{1/4}.\end{aligned}$$

**Rappel de cours.** Les productivités marginales des facteurs sont ici :

$$\begin{aligned}Pm_L &= \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{4} T^{1/2} K^{1/4} L^{-3/4}, \\ Pm_T &= \frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{1}{2} T^{-1/2} K^{1/4} L^{1/4}, \\ Pm_K &= \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{4} T^{1/2} K^{-3/4} L^{1/4}.\end{aligned}$$

À l'optimum intérieur, l'entreprise égalise les productivités marginales *par euro dépensé* :

$$\frac{Pm_L}{w} = \frac{Pm_T}{q} = \frac{Pm_K}{r}.$$

Cette condition exprime le fait suivant : le dernier euro dépensé en travail, en terre ou en capital doit procurer le même supplément de production. Sinon, l'entreprise pourrait réduire son coût en substituant un facteur à un autre.

Cette même condition peut se lire comme une condition de tangence entre l'isoquante et l'isocoût. Par exemple, entre travail et capital :

$$\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{w}{r}.$$

De façon analogue :

$$\frac{Pm_L}{Pm_T} = \frac{w}{q}, \quad \frac{Pm_K}{Pm_T} = \frac{r}{q}.$$

**Étape 3 : simplification des conditions de tangence.**

Entre travail et capital :

$$\frac{w}{r} = \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{\frac{1}{4}T^{1/2}K^{1/4}L^{-3/4}}{\frac{1}{4}T^{1/2}K^{-3/4}L^{1/4}} = K^{1/4+3/4}L^{-3/4-1/4} = \frac{K}{L}.$$

Donc

$$\boxed{K = \frac{w}{r}L.}$$

Entre travail et terre :

$$\frac{w}{q} = \frac{Pm_L}{Pm_T} = \frac{\frac{1}{4}T^{1/2}K^{1/4}L^{-3/4}}{\frac{1}{2}T^{-1/2}K^{1/4}L^{1/4}} = \frac{1}{2}T^{1/2+1/2}L^{-3/4-1/4} = \frac{1}{2} \frac{T}{L}.$$

Ainsi,

$$\boxed{T = 2\frac{w}{q}L.}$$

On a donc obtenu les proportions optimales entre facteurs :

$$K = \frac{w}{r}L, \quad T = 2\frac{w}{q}L.$$

**Question 3. Fonction de coût total, coût marginal et coût moyen. Étape 1 : demandes conditionnelles de facteurs.**

On remplace les relations précédentes dans la contrainte de production :

$$\bar{Q} = T^{1/2}K^{1/4}L^{1/4}.$$

Comme

$$T = 2\frac{w}{q}L \quad \text{et} \quad K = \frac{w}{r}L,$$

on obtient

$$\bar{Q} = \left(2\frac{w}{q}L\right)^{1/2} \left(\frac{w}{r}L\right)^{1/4} L^{1/4}.$$

On sépare les termes en prix et les termes en quantités :

$$\bar{Q} = \left(2\frac{w}{q}\right)^{1/2} \left(\frac{w}{r}\right)^{1/4} L^{1/2+1/4+1/4}.$$

Or

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Donc

$$\bar{Q} = \left(2\frac{w}{q}\right)^{1/2} \left(\frac{w}{r}\right)^{1/4} L.$$

On en déduit

$$L^*(\bar{Q}, w, q, r) = \bar{Q} \left(2\frac{w}{q}\right)^{-1/2} \left(\frac{w}{r}\right)^{-1/4}.$$

Ce qui s'écrit encore

$$L^*(\bar{Q}, w, q, r) = \frac{q^{1/2}r^{1/4}}{\sqrt{2}w^{3/4}} \bar{Q}.$$

Puis, à l'aide des relations de proportion :

$$K^*(\bar{Q}, w, q, r) = \frac{w}{r}L^*(\bar{Q}, w, q, r) = \frac{q^{1/2}w^{1/4}}{\sqrt{2}r^{3/4}} \bar{Q},$$

donc

$$K^*(\bar{Q}, w, q, r) = \frac{q^{1/2}w^{1/4}}{\sqrt{2}r^{3/4}} \bar{Q}.$$

De même,

$$T^*(\bar{Q}, w, q, r) = 2\frac{w}{q}L^*(\bar{Q}, w, q, r) = \sqrt{2}\frac{w^{1/4}r^{1/4}}{q^{1/2}} \bar{Q},$$

d'où

$$T^*(\bar{Q}, w, q, r) = \sqrt{2}\frac{w^{1/4}r^{1/4}}{q^{1/2}} \bar{Q}.$$

## Étape 2 : calcul du coût total.

Par définition,

$$C(\bar{Q}, w, q, r) = wL^* + qT^* + rK^*.$$

Calculons séparément chacun des trois termes.

D'abord,

$$wL^* = w \cdot \frac{q^{1/2}r^{1/4}}{\sqrt{2}w^{3/4}} \bar{Q} = \frac{w^{1/4}q^{1/2}r^{1/4}}{\sqrt{2}} \bar{Q}.$$

Ensuite,

$$rK^* = r \cdot \frac{q^{1/2}w^{1/4}}{\sqrt{2}r^{3/4}} \bar{Q} = \frac{w^{1/4}q^{1/2}r^{1/4}}{\sqrt{2}} \bar{Q}.$$

Enfin,

$$qT^* = q \cdot \sqrt{2}\frac{w^{1/4}r^{1/4}}{q^{1/2}} \bar{Q} = \sqrt{2}w^{1/4}q^{1/2}r^{1/4}\bar{Q}.$$

On additionne :

$$C(\bar{Q}, w, q, r) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) w^{1/4}q^{1/2}r^{1/4}\bar{Q}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

donc

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

On obtient ainsi :

$$C(\bar{Q}, w, q, r) = 2\sqrt{2} w^{1/4} q^{1/2} r^{1/4} \bar{Q}.$$

**Rappel de cours.** La fonction de coût est ici *linéaire* en  $\bar{Q}$ . Cela reflète le fait que la technologie présente des *rendements constants à l'échelle*, puisque la somme des exposants vaut

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Sous rendements constants à l'échelle, le coût total est proportionnel à la quantité produite.

### Étape 3 : coût marginal.

Le coût marginal est la dérivée du coût total par rapport à  $\bar{Q}$  :

$$Cm(\bar{Q}) = \frac{\partial C}{\partial \bar{Q}}.$$

Comme le coût total est linéaire en  $\bar{Q}$ , on obtient :

$$Cm(\bar{Q}) = 2\sqrt{2} w^{1/4} q^{1/2} r^{1/4}.$$

### Étape 4 : coût moyen.

Le coût moyen est

$$CM(\bar{Q}) = \frac{C(\bar{Q}, w, q, r)}{\bar{Q}}.$$

Donc

$$CM(\bar{Q}) = 2\sqrt{2} w^{1/4} q^{1/2} r^{1/4}.$$

On constate donc que

$$Cm(\bar{Q}) = CM(\bar{Q}).$$

Cela est caractéristique d'une technologie à rendements constants à l'échelle, en l'absence de coût fixe.

**Remarque complémentaire sur les parts de coût.** Comme

$$C = wL + qT + rK = 4wL$$

puisque  $rK = wL$  et  $qT = 2wL$ , on obtient immédiatement :

$$wL = \frac{1}{4}C, \quad rK = \frac{1}{4}C, \quad qT = \frac{1}{2}C.$$

Les parts des facteurs dans le coût total reproduisent donc exactement les exposants de la fonction

de production Cobb–Douglas.

**Question 4. Fonction d’offre du producteur et profit à l’équilibre.** L’entreprise est en concurrence pure et parfaite sur le marché du bien. Elle prend donc le prix  $p$  du bien comme donné et choisit sa quantité de production  $Q$  afin de maximiser son profit :

$$\max_{Q \geq 0} \pi(Q) = pQ - C(Q, w, q, r).$$

Comme

$$C(Q, w, q, r) = 2\sqrt{2} w^{1/4} q^{1/2} r^{1/4} Q,$$

on a

$$\pi(Q) = [p - 2\sqrt{2} w^{1/4} q^{1/2} r^{1/4}] Q.$$

**Analyse selon la position du prix par rapport au coût unitaire.**

*Premier cas :*

$$p < 2\sqrt{2} w^{1/4} q^{1/2} r^{1/4}.$$

Alors le coefficient de  $Q$  dans la fonction de profit est négatif. Le profit décroît avec  $Q$ . Il est donc optimal de produire

$$Q^s = 0,$$

et le profit maximal vaut

$$\pi^* = 0.$$

*Deuxième cas :*

$$p = 2\sqrt{2} w^{1/4} q^{1/2} r^{1/4}.$$

Alors

$$\pi(Q) = 0 \quad \text{pour tout } Q \geq 0.$$

Toute quantité est optimale. Il n’existe pas de quantité d’offre unique pour l’entreprise ; l’offre individuelle est alors une *correspondance* :

$$Q^s \in [0, +\infty[.$$

Le profit vaut dans tous les cas

$$\pi^* = 0.$$

*Troisième cas :*

$$p > 2\sqrt{2} w^{1/4} q^{1/2} r^{1/4}.$$

Alors le coefficient de  $Q$  dans le profit est strictement positif. Le profit augmente sans borne avec

$Q$ . Il n'existe donc **pas de maximum fini** :

pas de solution optimale finie.

**Fonction d'offre individuelle.** On peut donc écrire la correspondance d'offre de la manière suivante :

$$Q^s(p; w, q, r) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 2\sqrt{2} w^{1/4} q^{1/2} r^{1/4}, \\ \text{tout } Q \geq 0 & \text{si } p = 2\sqrt{2} w^{1/4} q^{1/2} r^{1/4}, \\ \text{pas d'optimum fini} & \text{si } p > 2\sqrt{2} w^{1/4} q^{1/2} r^{1/4}. \end{cases}$$

**Rappel de cours important.** Avec une technologie à rendements constants à l'échelle et sans coût fixe, le coût moyen est constant et égal au coût marginal. Dans un cadre concurrentiel, cela implique qu'à l'équilibre on doit avoir

$$p = CM = Cm.$$

En effet :

- si  $p < CM$ , aucune production n'est rentable ;
- si  $p > CM$ , le profit unitaire est positif et la production optimale devient arbitrairement grande ;
- seule l'égalité  $p = CM = Cm$  est compatible avec un équilibre concurrentiel.

Ainsi, à l'équilibre concurrentiel,

$$p^* = 2\sqrt{2} w^{1/4} q^{1/2} r^{1/4}$$

et le profit du producteur est

$$\pi^* = 0.$$

**Justification supplémentaire par le théorème d'Euler.** La fonction de production est homogène de degré 1. Par le théorème d'Euler,

$$Q = Pm_L L + Pm_T T + Pm_K K.$$

En multipliant par le prix du bien  $p$ , on obtient

$$pQ = pPm_L L + pPm_T T + pPm_K K.$$

Or en concurrence parfaite, à l'optimum,

$$pPm_L = w, \quad pPm_T = q, \quad pPm_K = r.$$

Donc

$$pQ = wL + qT + rK = C(Q).$$

Par conséquent,

$$\pi = pQ - C(Q) = 0.$$

On retrouve bien l'annulation du profit à l'équilibre.

---

## Exercice 2

On considère une économie d'échanges comprenant deux biens 1 et 2, ainsi que deux agents  $A$  et  $B$ . Les préférences sont données par

$$U_A = c_1^A (c_2^A)^2, \quad U_B = \frac{1}{4} \ln(c_1^B) + \frac{1}{2} \ln(c_2^B).$$

Les dotations initiales sont :

$$\omega^A = (0, 50), \quad \omega^B = (100, 100).$$

Le bien 1 est choisi comme numéraire, de sorte que

$$p_1 = 1, \quad p_2 > 0.$$

**Question 1. Contraintes budgétaires des deux agents. Rappel de cours.** Dans une économie d'échanges, chaque agent dispose initialement d'une dotation  $\omega^i$ . À prix donnés, cette dotation peut être vendue sur le marché. La valeur de cette dotation constitue le revenu de l'agent. La contrainte budgétaire s'écrit donc :

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i.$$

L'interprétation fondamentale est :

$$\text{valeur des emplois} \leq \text{valeur des ressources}.$$

Ici :

- la *valeur des emplois* est la dépense de consommation ;
- la *valeur des ressources* est la valeur marchande de la dotation initiale.

Lorsque les préférences sont localement non saturées, ce qui est le cas ici, l'agent dépense tout son revenu à l'optimum, et l'inégalité budgétaire est satisfaite avec égalité.

**Agent A.** La valeur de sa dotation est

$$m_A = p_1 \omega_1^A + p_2 \omega_2^A = 1 \cdot 0 + p_2 \cdot 50 = 50p_2.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^A + p_2 c_2^A \leq 50p_2.$$

À l'optimum :

$$c_1^A + p_2 c_2^A = 50p_2.$$

**Agent B.** La valeur de sa dotation est

$$m_B = p_1 \omega_1^B + p_2 \omega_2^B = 100 + 100p_2.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^B + p_2 c_2^B \leq 100 + 100p_2.$$

À l'optimum :

$$c_1^B + p_2 c_2^B = 100 + 100p_2.$$

**Rappel sur la neutralité monétaire.** Les demandes walrassiennes sont homogènes de degré 0 en prix et revenu : si tous les prix et le revenu sont multipliés par un même facteur strictement positif, les consommations demandées ne changent pas. Cela traduit l'absence d'illusion monétaire. Seuls comptent les prix relatifs et le revenu réel. Le choix du bien 1 comme numéraire ne modifie donc pas les allocations réelles ; il fixe simplement l'unité dans laquelle les prix sont exprimés.

## Question 2. Détermination des demandes de A et de B. Demande de l'agent A.

L'agent A résout

$$\max_{c_1^A, c_2^A \geq 0} c_1^A (c_2^A)^2$$

sous la contrainte

$$c_1^A + p_2 c_2^A = 50p_2.$$

Comme les préférences sont strictement croissantes, la contrainte budgétaire est saturée.

On écrit le lagrangien :

$$\mathcal{L}_A = c_1^A (c_2^A)^2 + \lambda_A (50p_2 - c_1^A - p_2 c_2^A).$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial c_1^A} = (c_2^A)^2 - \lambda_A = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial c_2^A} = 2c_1^A c_2^A - \lambda_A p_2 = 0,$$

$$50p_2 - c_1^A - p_2 c_2^A = 0.$$

Des deux premières équations, on déduit

$$\lambda_A = (c_2^A)^2 \quad \text{et} \quad \lambda_A = \frac{2c_1^A c_2^A}{p_2}.$$

En identifiant ces deux expressions :

$$(c_2^A)^2 = \frac{2c_1^A c_2^A}{p_2}.$$

Comme  $c_2^A > 0$  à l'optimum intérieur, on peut diviser par  $c_2^A$  :

$$c_2^A = \frac{2c_1^A}{p_2}.$$

On obtient donc

$$\boxed{c_1^A = \frac{p_2}{2} c_2^A}.$$

On remplace cette relation dans la contrainte budgétaire :

$$\frac{p_2}{2} c_2^A + p_2 c_2^A = 50p_2.$$

Donc

$$\frac{3p_2}{2} c_2^A = 50p_2.$$

Comme  $p_2 > 0$ , on divise par  $p_2$  :

$$\frac{3}{2} c_2^A = 50.$$

Ainsi,

$$c_2^A = \frac{100}{3}.$$

Puis

$$c_1^A = \frac{p_2}{2} \cdot \frac{100}{3} = \frac{50}{3} p_2.$$

Les demandes walrassiennes de  $A$  sont donc :

$$\boxed{c_1^A(p_2) = \frac{50}{3} p_2, \quad c_2^A(p_2) = \frac{100}{3}.$$

**Interprétation.** L'agent  $A$  consacre un tiers de son revenu au bien 1 et deux tiers au bien 2. En effet :

$$c_1^A = \frac{1}{3} m_A = \frac{1}{3} (50p_2) = \frac{50}{3} p_2,$$

$$c_2^A = \frac{2}{3} \frac{m_A}{p_2} = \frac{2}{3} \frac{50p_2}{p_2} = \frac{100}{3}.$$

**Demande de l'agent  $B$ .**

L'agent  $B$  résout

$$\max_{c_1^B, c_2^B > 0} \frac{1}{4} \ln(c_1^B) + \frac{1}{2} \ln(c_2^B)$$

sous la contrainte

$$c_1^B + p_2 c_2^B = 100 + 100p_2.$$

On écrit le lagrangien :

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{4} \ln(c_1^B) + \frac{1}{2} \ln(c_2^B) + \lambda_B (100 + 100p_2 - c_1^B - p_2 c_2^B).$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial c_1^B} &= \frac{1}{4c_1^B} - \lambda_B = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial c_2^B} &= \frac{1}{2c_2^B} - \lambda_B p_2 = 0, \\ 100 + 100p_2 - c_1^B - p_2 c_2^B &= 0. \end{aligned}$$

Des deux premières équations, on tire

$$\lambda_B = \frac{1}{4c_1^B} \quad \text{et} \quad \lambda_B = \frac{1}{2p_2 c_2^B}.$$

En les identifiant :

$$\frac{1}{4c_1^B} = \frac{1}{2p_2 c_2^B}.$$

Par produit en croix,

$$2p_2 c_2^B = 4c_1^B,$$

soit

$$\boxed{c_1^B = \frac{p_2}{2} c_2^B}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire :

$$\frac{p_2}{2} c_2^B + p_2 c_2^B = 100 + 100p_2.$$

Donc

$$\frac{3p_2}{2} c_2^B = 100 + 100p_2.$$

D'où

$$c_2^B = \frac{2(100 + 100p_2)}{3p_2}.$$

Puis

$$c_1^B = \frac{p_2}{2} c_2^B = \frac{100 + 100p_2}{3}.$$

Les demandes walrassiennes de  $B$  sont donc :

$$c_1^B(p_2) = \frac{100 + 100p_2}{3}, \quad c_2^B(p_2) = \frac{2(100 + 100p_2)}{3p_2}.$$

**Interprétation.** L'agent  $B$  consacre lui aussi un tiers de son revenu au bien 1 et deux tiers au bien 2. En effet, pour une utilité logarithmique pondérée de la forme

$$\alpha \ln c_1 + \beta \ln c_2,$$

les parts budgétaires sont

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Ici,

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha + \beta = \frac{3}{4},$$

donc

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

**Remarque importante.** Les deux agents ont donc les *mêmes parts budgétaires*. Cette propriété simplifiera fortement l'analyse de l'équilibre général.

**Question 3. Conditions d'équilibre sur les marchés et détermination du prix d'équilibre. Rappel de cours.** Un équilibre général walrassien est constitué d'un vecteur de prix et d'une allocation tels que :

1. chaque agent maximise son utilité sous sa contrainte budgétaire ;
2. les marchés s'équilibrent.

Les ressources agrégées initiales sont

$$\omega_1^A + \omega_1^B = 0 + 100 = 100, \quad \omega_2^A + \omega_2^B = 50 + 100 = 150.$$

Les conditions d'équilibre sur les marchés sont donc :

$$c_1^A + c_1^B = 100, \quad c_2^A + c_2^B = 150.$$

**Rappel sur la loi de Walras.** Si chaque agent respecte sa contrainte budgétaire, alors la somme des demandes excédentaires valorisées aux prix de marché est nulle :

$$p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) = 0.$$

Comme  $p_1 = 1$ , cela devient

$$z_1(p) + p_2 z_2(p) = 0.$$

Par conséquent, si l'un des deux marchés est à l'équilibre, l'autre l'est automatiquement. Il suffit donc de résoudre une seule équation d'équilibre.

### Calcul à partir du marché du bien 1.

On impose

$$c_1^A + c_1^B = 100.$$

En remplaçant par les demandes obtenues ci-dessus :

$$\frac{50}{3}p_2 + \frac{100 + 100p_2}{3} = 100.$$

On multiplie les deux membres par 3 :

$$50p_2 + 100 + 100p_2 = 300.$$

On regroupe les termes en  $p_2$  :

$$150p_2 + 100 = 300.$$

Donc

$$150p_2 = 200.$$

Enfin,

$$p_2^* = \frac{200}{150} = \frac{4}{3}.$$

### Vérification sur le marché du bien 2.

On a

$$c_2^A = \frac{100}{3}, \quad c_2^B = \frac{2(100 + 100p_2)}{3p_2}.$$

En  $p_2 = \frac{4}{3}$ ,

$$c_2^B = \frac{2 \left( 100 + \frac{400}{3} \right)}{3 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{2 \cdot \frac{700}{3}}{4} = \frac{700}{6} = \frac{350}{3}.$$

Ainsi,

$$c_2^A + c_2^B = \frac{100}{3} + \frac{350}{3} = \frac{450}{3} = 150.$$

Le marché du bien 2 est donc bien équilibré.

**Conclusion.** Le prix relatif d'équilibre est

$$p_2^* = \frac{4}{3}.$$

Comme  $p_1 = 1$ , le vecteur de prix d'équilibre est

$$(p_1^*, p_2^*) = \left(1, \frac{4}{3}\right).$$

**Interprétation économique.** Le bien 2 est relativement abondant dans l'économie, puisque la dotation agrégée vaut  $(100, 150)$ . Pour que les demandes agrégées coïncident avec cette structure des ressources, il faut que le bien 2 soit relativement moins cher que le bien 1, ce qui correspond ici à un prix relatif

$$p_2^* = \frac{4}{3}$$

quand le bien 1 est le numéraire. Plus précisément, comme les deux agents consacrent les mêmes parts de revenu aux deux biens, le prix d'équilibre s'ajuste simplement de façon à rendre compatibles les demandes agrégées avec les dotations agrégées.

**Question 4. Nouvelle redistribution des ressources et nouveau prix d'équilibre.** On modifie la répartition des dotations individuelles. Les nouvelles dotations sont :

$$\omega'^A = (0, 150), \quad \omega'^B = (100, 0).$$

**Première remarque.** La dotation agrégée de l'économie ne change pas :

$$\omega'^A + \omega'^B = (100, 150).$$

Seule la *répartition* des ressources entre agents est modifiée.

**Étape 1 : nouvelles contraintes budgétaires.**

Pour l'agent  $A$ , la valeur de la dotation devient

$$m'_A = 0 + 150p_2 = 150p_2.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^A + p_2 c_2^A = 150p_2.$$

Pour l'agent  $B$ , la valeur de la dotation devient

$$m'_B = 100 + 0 = 100.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^B + p_2 c_2^B = 100.$$

**Étape 2 : nouvelles demandes.**

Comme les préférences ne changent pas, les parts budgétaires restent inchangées.

Pour  $A$ , un tiers du revenu est consacré au bien 1, deux tiers au bien 2. Donc

$$c_1^A = \frac{1}{3}m'_A = \frac{1}{3}(150p_2) = 50p_2,$$

$$c_2^A = \frac{2}{3} \frac{m'_A}{p_2} = \frac{2}{3} \frac{150p_2}{p_2} = 100.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A = 50p_2, \quad c_2^A = 100.}$$

Pour  $B$ ,

$$c_1^B = \frac{1}{3}m'_B = \frac{100}{3},$$

$$c_2^B = \frac{2}{3} \frac{m'_B}{p_2} = \frac{2}{3} \frac{100}{p_2} = \frac{200}{3p_2}.$$

Donc

$$\boxed{c_1^B = \frac{100}{3}, \quad c_2^B = \frac{200}{3p_2}.}$$

### Étape 3 : nouvel équilibre général.

Comme précédemment, il suffit d'imposer l'équilibre sur un seul marché, par la loi de Walras.

On écrit l'équilibre sur le marché du bien 1 :

$$c_1^A + c_1^B = 100.$$

Donc

$$50p_2 + \frac{100}{3} = 100.$$

On isole  $p_2$  :

$$50p_2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}.$$

Ainsi,

$$p_2 = \frac{200}{150} = \frac{4}{3}.$$

Donc

$$\boxed{p_2^* = \frac{4}{3}.}$$

**Conclusion.** Le nouveau prix d'équilibre est inchangé :

$$\boxed{p_2^* = \frac{4}{3}.}$$

**Interprétation économique approfondie.** Ce résultat peut être compris de manière très simple.

Les deux agents ont exactement les mêmes demandes individuelles *en parts budgétaires* :

$$\text{part consacrée au bien 1} = \frac{1}{3}, \quad \text{part consacrée au bien 2} = \frac{2}{3}.$$

Par conséquent, les demandes agrégées dépendent uniquement :

- du revenu total de l'économie ;
- et donc, à prix donnés, de la valeur de la dotation agrégée.

Or la redistribution modifie les revenus individuels, mais ne change pas la dotation totale de l'économie. À prix donnés, le revenu total reste

$$m'_A + m'_B = 100 + 150p_2,$$

qui est exactement la valeur de la dotation agrégée (100, 150). Comme les parts budgétaires sont les mêmes pour  $A$  et  $B$ , la demande agrégée de chaque bien reste inchangée. Le prix d'équilibre ne peut donc pas être modifié par cette redistribution.

Autrement dit, dans cette économie particulière, les prix d'équilibre sont déterminés par les préférences agrégées et la dotation agrégée, non par la seule répartition individuelle des dotations.

### Réponse finale pour l'exercice 2.

Contraintes budgétaires initiales :	$c_1^A + p_2 c_2^A = 50p_2,$	$c_1^B + p_2 c_2^B = 100 + 100p_2,$
Demandes initiales :	$c_1^A = \frac{50}{3}p_2,$	$c_2^A = \frac{100}{3},$
	$c_1^B = \frac{100 + 100p_2}{3},$	$c_2^B = \frac{2(100 + 100p_2)}{3p_2},$
Prix d'équilibre initial :	$p_2^* = \frac{4}{3},$	
Après redistribution :	$c_1^A = 50p_2,$	$c_2^A = 100,$
	$c_1^B = \frac{100}{3},$	$c_2^B = \frac{200}{3p_2},$
Nouveau prix d'équilibre :	$p_2^* = \frac{4}{3}.$	

## 2.3 Corrigé du sujet de septembre 2025

### Exercice I

**Question 1.** On considère deux biens de consommation, 1 et 2, dont les prix sont

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 10.$$

Les utilités marginales sont

$$Um_1 = 1, \quad Um_2 = 4.$$

On cherche à déterminer si le consommateur doit modifier son panier de consommation.

**Rappel de cours.** Lorsqu'un consommateur choisit des quantités strictement positives des deux biens, la condition marginale d'optimalité d'un optimum intérieur s'écrit

$$\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2}.$$

Cette condition signifie que le dernier euro dépensé dans chacun des biens doit procurer le même supplément d'utilité.

Elle peut également s'écrire sous la forme

$$TMS_{1,2} = \frac{p_1}{p_2},$$

où

$$TMS_{1,2} = \frac{Um_1}{Um_2}.$$

L'interprétation est la suivante : à l'optimum, le taux auquel le consommateur est prêt à substituer le bien 2 au bien 1 doit être égal au taux auquel le marché permet cette substitution.

**Calcul à partir des utilités marginales par euro dépensé.** On calcule :

$$\frac{Um_1}{p_1} = \frac{1}{2} = 0,5, \quad \frac{Um_2}{p_2} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

On constate que

$$\frac{Um_1}{p_1} > \frac{Um_2}{p_2}.$$

Le bien 1 procure donc davantage d'utilité supplémentaire par euro dépensé que le bien 2. Le consommateur a intérêt à transférer une partie de sa dépense du bien 2 vers le bien 1.

**Même conclusion via le taux marginal de substitution.** On calcule

$$TMS_{1,2} = \frac{Um_1}{Um_2} = \frac{1}{4}.$$

Et

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Comme

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{5},$$

le consommateur valorise relativement plus le bien 1 que ne le suggère son prix relatif de marché. Il est donc rationnel d'augmenter la consommation du bien 1 et de réduire celle du bien 2.

**Conclusion.** Le panier initial n'est pas optimal. Le consommateur doit :

augmenter sa consommation du bien 1 et diminuer sa consommation du bien 2.

**Question 2.** Une entreprise utilise deux facteurs, le travail  $L$  et le capital  $K$ . Les prix des facteurs sont

$$w = 1, \quad r = 10.$$

Les productivités marginales observées sont

$$Pm_L = 10, \quad Pm_K = 60.$$

**Rappel de cours.** Lorsqu'une entreprise cherche à minimiser son coût pour produire un niveau donné, la condition marginale d'optimalité, sous solution intérieure, est :

$$\frac{Pm_L}{w} = \frac{Pm_K}{r}.$$

L'idée économique est la même que pour le consommateur : le dernier euro dépensé dans chacun des facteurs doit procurer le même supplément de production.

Cette condition peut aussi s'écrire

$$TMST_{L,K} = \frac{w}{r}, \quad \text{avec} \quad TMST_{L,K} = \frac{Pm_L}{Pm_K}.$$

Il s'agit de la condition de tangence entre l'isoquante et l'isocoût.

**Calcul des productivités marginales par euro dépensé.** On obtient :

$$\frac{Pm_L}{w} = \frac{10}{1} = 10, \quad \frac{Pm_K}{r} = \frac{60}{10} = 6.$$

Comme

$$\frac{Pm_L}{w} > \frac{Pm_K}{r},$$

un euro supplémentaire dépensé en travail rapporte plus de production qu'un euro supplémentaire dépensé en capital.

La combinaison productive actuelle n'est donc pas optimale.

**Interprétation économique.** L'entreprise peut réduire son coût de production, à niveau de production inchangé, en :

- augmentant la quantité de travail ;
- diminuant la quantité de capital.

**Vérification via le taux marginal de substitution technique.** On calcule

$$TMST_{L,K} = \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6},$$

tandis que

$$\frac{w}{r} = \frac{1}{10}.$$

Comme

$$\frac{1}{6} > \frac{1}{10},$$

on retrouve le fait que le travail est relativement plus rentable que le capital au regard de son coût.

**Conclusion.** L'entreprise peut encore diminuer son coût total de production. Elle doit :

augmenter le travail et diminuer le capital.

## Exercice II

On considère une entreprise qui produit selon la technologie

$$Q = K^{1/4}L^{1/4},$$

où  $K$  désigne le capital et  $L$  le travail. Les prix des facteurs sont  $r$  pour le capital et  $w$  pour le travail.

**Question 1. Programme de minimisation des coûts.** Pour produire une quantité donnée  $\bar{Q} > 0$ , l'entreprise choisit  $L$  et  $K$  de façon à minimiser son coût total.

Le programme de minimisation des coûts s'écrit :

$$\min_{L \geq 0, K \geq 0} wL + rK$$

sous la contrainte technologique

$$K^{1/4}L^{1/4} \geq \bar{Q}.$$

**Rappel de cours.** Comme la fonction de production est croissante en chacun des facteurs, il n'est jamais optimal, dans un programme de minimisation des coûts, de produire strictement plus que le niveau requis. La contrainte est donc saturée à l'optimum :

$$K^{1/4}L^{1/4} = \bar{Q}.$$

On peut donc reformuler le problème sous la forme

$$\min_{L \geq 0, K \geq 0} wL + rK \quad \text{sous} \quad K^{1/4}L^{1/4} = \bar{Q}.$$

**Question 2. Conditions marginales d'optimalité. Étape 1 : écriture du lagrangien.**

On introduit un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  :

$$\mathcal{L}(L, K, \lambda) = wL + rK + \lambda (\bar{Q} - K^{1/4}L^{1/4}).$$

**Étape 2 : conditions du premier ordre.** On dérive :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \lambda \frac{1}{4} K^{1/4} L^{-3/4} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \lambda \frac{1}{4} K^{-3/4} L^{1/4} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \bar{Q} - K^{1/4} L^{1/4} = 0.$$

On en déduit :

$$w = \lambda \frac{1}{4} K^{1/4} L^{-3/4}, \quad r = \lambda \frac{1}{4} K^{-3/4} L^{1/4}, \quad \bar{Q} = K^{1/4} L^{1/4}.$$

**Rappel de cours.** Les productivités marginales sont :

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{4} K^{1/4} L^{-3/4}, \quad Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{4} K^{-3/4} L^{1/4}.$$

À l'optimum intérieur, il faut que

$$\frac{Pm_L}{w} = \frac{Pm_K}{r},$$

ou, de manière équivalente,

$$\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{w}{r}.$$

C'est la condition de tangence entre l'isoquante et l'isocoût.

**Étape 3 : simplification de la condition de tangence.** On calcule :

$$\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{\frac{1}{4} K^{1/4} L^{-3/4}}{\frac{1}{4} K^{-3/4} L^{1/4}} = K^{1/4+3/4} L^{-3/4-1/4} = \frac{K}{L}.$$

La condition de tangence devient donc

$$\frac{K}{L} = \frac{w}{r}.$$

On peut l'écrire sous la forme

$$\boxed{K = \frac{w}{r} L} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{L = \frac{r}{w} K}.$$

Cette relation donne la proportion optimale des facteurs.

**Question 3. Fonction de coût total, coût marginal et coût moyen. Étape 1 : demandes conditionnelles de facteurs.**

On part de la relation optimale

$$K = \frac{w}{r}L.$$

On la remplace dans la contrainte technologique :

$$\bar{Q} = K^{1/4}L^{1/4} = \left(\frac{w}{r}L\right)^{1/4} L^{1/4}.$$

On regroupe les termes :

$$\bar{Q} = \left(\frac{w}{r}\right)^{1/4} L^{1/2}.$$

Donc

$$L^{1/2} = \bar{Q} \left(\frac{w}{r}\right)^{-1/4} = \bar{Q} \left(\frac{r}{w}\right)^{1/4}.$$

En élevant au carré :

$$L = \bar{Q}^2 \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}.$$

Ainsi,

$$L^*(\bar{Q}, w, r) = \bar{Q}^2 \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}.$$

Puis

$$K^*(\bar{Q}, w, r) = \frac{w}{r}L^* = \frac{w}{r}\bar{Q}^2 \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2} = \bar{Q}^2 \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}.$$

Donc

$$K^*(\bar{Q}, w, r) = \bar{Q}^2 \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}.$$

**Étape 2 : calcul du coût total.** Par définition,

$$C(\bar{Q}, w, r) = wL^*(\bar{Q}, w, r) + rK^*(\bar{Q}, w, r).$$

On calcule séparément :

$$wL^* = w\bar{Q}^2 \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2} = \bar{Q}^2 \sqrt{wr},$$

et

$$rK^* = r\bar{Q}^2 \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2} = \bar{Q}^2 \sqrt{wr}.$$

En additionnant,

$$C(\bar{Q}, w, r) = 2\sqrt{wr} \bar{Q}^2.$$

Donc

$$C(\bar{Q}, w, r) = 2\sqrt{wr} \bar{Q}^2.$$

**Remarque économique.** La fonction de coût est ici quadratique en  $\bar{Q}$ . Cela reflète le fait que

la fonction de production présente des rendements décroissants à l'échelle, puisque

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1.$$

**Étape 3 : coût marginal.** Le coût marginal est

$$Cm(\bar{Q}) = \frac{\partial C}{\partial \bar{Q}}.$$

On dérive :

$$Cm(\bar{Q}) = 4\sqrt{wr} \bar{Q}.$$

Ainsi,

$$\boxed{Cm(\bar{Q}) = 4\sqrt{wr} \bar{Q}.}$$

**Étape 4 : coût moyen.** Le coût moyen est

$$CM(\bar{Q}) = \frac{C(\bar{Q}, w, r)}{\bar{Q}}.$$

Donc

$$CM(\bar{Q}) = 2\sqrt{wr} \bar{Q}.$$

Ainsi,

$$\boxed{CM(\bar{Q}) = 2\sqrt{wr} \bar{Q}.}$$

On remarque que

$$Cm(\bar{Q}) = 2 CM(\bar{Q}).$$

Le coût marginal est supérieur au coût moyen, ce qui est cohérent avec le caractère croissant du coût marginal.

**Question 4. Fonction d'offre, profit à l'équilibre et part du profit dans le chiffre d'affaires.** Sous concurrence pure et parfaite, l'entreprise prend le prix du bien  $p$  comme donné et choisit  $Q$  de façon à maximiser son profit :

$$\max_{Q \geq 0} \pi(Q) = pQ - C(Q, w, r).$$

Ici,

$$\pi(Q) = pQ - 2\sqrt{wr} Q^2.$$

**Étape 1 : condition du premier ordre.** La dérivée du profit par rapport à  $Q$  vaut

$$\frac{d\pi}{dQ} = p - 4\sqrt{wr} Q.$$

À l'optimum intérieur, on impose

$$\frac{d\pi}{dQ} = 0,$$

d'où

$$p - 4\sqrt{wr}Q = 0.$$

Ainsi,

$$Q^s(p, w, r) = \frac{p}{4\sqrt{wr}}.$$

**Vérification de second ordre.** On a

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -4\sqrt{wr} < 0,$$

donc la fonction de profit est strictement concave en  $Q$ , et la solution trouvée est bien un maximum.

**Interprétation.** L'offre est croissante en  $p$  et décroissante en  $w$  et  $r$ , conformément à l'intuition économique :

- si le prix du bien augmente, produire devient plus rentable ;
- si le prix des facteurs augmente, le coût marginal augmente et l'offre diminue.

**Étape 2 : calcul du profit optimal.** On remplace  $Q^s$  dans la fonction de profit :

$$\pi^*(p, w, r) = pQ^s - 2\sqrt{wr}(Q^s)^2.$$

Calculons séparément les deux termes.

D'abord,

$$pQ^s = p \cdot \frac{p}{4\sqrt{wr}} = \frac{p^2}{4\sqrt{wr}}.$$

Ensuite,

$$(Q^s)^2 = \left(\frac{p}{4\sqrt{wr}}\right)^2 = \frac{p^2}{16wr}.$$

Donc

$$2\sqrt{wr}(Q^s)^2 = 2\sqrt{wr} \cdot \frac{p^2}{16wr} = \frac{p^2}{8\sqrt{wr}}.$$

Par conséquent,

$$\pi^*(p, w, r) = \frac{p^2}{4\sqrt{wr}} - \frac{p^2}{8\sqrt{wr}} = \frac{p^2}{8\sqrt{wr}}.$$

Ainsi,

$$\pi^*(p, w, r) = \frac{p^2}{8\sqrt{wr}}.$$

**Étape 3 : part du profit dans le chiffre d'affaires.** Le chiffre d'affaires est

$$CA = pQ^s.$$

Or on a déjà calculé

$$CA = \frac{p^2}{4\sqrt{wr}}.$$

La part du profit dans le chiffre d'affaires vaut donc

$$\frac{\pi^*}{CA} = \frac{\frac{p^2}{8\sqrt{wr}}}{\frac{p^2}{4\sqrt{wr}}} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\pi^*}{pQ^*} = \frac{1}{2}.}$$

**Interprétation économique.** Le profit représente ici la moitié du chiffre d'affaires. Cela tient au fait que, avec une fonction de coût quadratique

$$C(Q) = 2\sqrt{wr} Q^2,$$

le coût moyen vaut

$$CM(Q) = 2\sqrt{wr} Q$$

et le coût marginal vaut

$$Cm(Q) = 4\sqrt{wr} Q = 2CM(Q).$$

À l'optimum concurrentiel,

$$p = Cm(Q^*) = 2CM(Q^*),$$

de sorte que

$$pQ^* = 2C(Q^*),$$

puis

$$\pi^* = pQ^* - C(Q^*) = C(Q^*) = \frac{1}{2}pQ^*.$$

### Exercice III

On considère une économie d'échanges avec trois biens 1, 2 et 3, et deux agents  $A$  et  $B$ . Les préférences sont :

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A, \quad U_B = \frac{1}{2} \ln(c_1^B) + \frac{1}{4} \ln(c_2^B) + \frac{1}{4} \ln(c_3^B).$$

Les dotations initiales sont

$$\omega^A = (0, 100, 200), \quad \omega^B = (100, 100, 100).$$

Le bien 1 est choisi comme numéraire :

$$p_1 = 1, \quad p_2 > 0, \quad p_3 > 0.$$

**Question 1. Contraintes budgétaires des deux agents. Rappel de cours.** Dans une économie d'échanges, chaque agent peut vendre sa dotation initiale au prix du marché, puis acheter le panier qu'il souhaite. La contrainte budgétaire s'écrit donc :

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i.$$

Autrement dit :

$$\text{valeur des emplois} \leq \text{valeur des ressources}.$$

Lorsque les préférences sont localement non saturées, l'agent dépense tout son revenu à l'optimum :

$$p \cdot c^i = p \cdot \omega^i.$$

**Agent A.** La valeur de sa dotation est :

$$m_A = p_1 \omega_1^A + p_2 \omega_2^A + p_3 \omega_3^A = 0 + 100p_2 + 200p_3.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A \leq 100p_2 + 200p_3.$$

À l'optimum :

$$\boxed{c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A = 100p_2 + 200p_3.}$$

**Agent B.** La valeur de sa dotation est :

$$m_B = p_1 \omega_1^B + p_2 \omega_2^B + p_3 \omega_3^B = 100 + 100p_2 + 100p_3.$$

Sa contrainte budgétaire est :

$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B \leq 100 + 100p_2 + 100p_3.$$

À l'optimum :

$$\boxed{c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 100 + 100p_2 + 100p_3.}$$

**Rappel sur la neutralité monétaire.** Les demandes walrassiennes sont homogènes de degré 0 en prix et revenu. Cela signifie que si tous les prix et tous les revenus sont multipliés par un

même scalaire positif, les demandes ne changent pas. C'est l'absence d'illusion monétaire. Le choix de  $p_1 = 1$  ne modifie donc pas les allocations réelles ; il fixe simplement l'unité de compte.

**Question 2. Détermination des demandes de A et de B. Demande de l'agent A.**

L'agent A résout

$$\max_{c_1^A, c_2^A, c_3^A \geq 0} (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A$$

sous la contrainte

$$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A = 100p_2 + 200p_3.$$

**Méthode 1 : raisonnement par Cobb–Douglas.** La fonction d'utilité est de type Cobb–Douglas avec exposants

$$2, 1, 1.$$

La somme des exposants vaut

$$2 + 1 + 1 = 4.$$

Dans un tel cas, l'agent consacre à chaque bien une part fixe de son revenu, égale à l'exposant du bien divisé par la somme des exposants. On obtient donc les parts budgétaires :

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ pour le bien 1, } \quad \frac{1}{4} \text{ pour le bien 2, } \quad \frac{1}{4} \text{ pour le bien 3.}$$

Le revenu de A étant

$$m_A = 100p_2 + 200p_3,$$

les demandes sont :

$$c_1^A = \frac{1}{2} m_A = \frac{1}{2} (100p_2 + 200p_3) = 50p_2 + 100p_3,$$

$$c_2^A = \frac{1}{4} \frac{m_A}{p_2} = \frac{100p_2 + 200p_3}{4p_2} = 25 + 50 \frac{p_3}{p_2},$$

$$c_3^A = \frac{1}{4} \frac{m_A}{p_3} = \frac{100p_2 + 200p_3}{4p_3} = 25 \frac{p_2}{p_3} + 50.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A = 50p_2 + 100p_3, \quad c_2^A = 25 + 50 \frac{p_3}{p_2}, \quad c_3^A = 25 \frac{p_2}{p_3} + 50.}$$

**Méthode 2 : vérification par le lagrangien.** On peut aussi écrire

$$\mathcal{L}_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A + \lambda_A (100p_2 + 200p_3 - c_1^A - p_2 c_2^A - p_3 c_3^A).$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$2c_1^A c_2^A c_3^A - \lambda_A = 0,$$

$$(c_1^A)^2 c_3^A - \lambda_A p_2 = 0,$$

$$(c_1^A)^2 c_2^A - \lambda_A p_3 = 0.$$

En comparant ces équations, on retrouve les proportions optimales traduisant les parts budgétaires précédentes.

### Demande de l'agent $B$ .

L'agent  $B$  résout

$$\max_{c_1^B, c_2^B, c_3^B > 0} \frac{1}{2} \ln(c_1^B) + \frac{1}{4} \ln(c_2^B) + \frac{1}{4} \ln(c_3^B)$$

sous la contrainte

$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 100 + 100p_2 + 100p_3.$$

**Rappel de cours.** Pour une utilité logarithmique pondérée de la forme

$$\alpha_1 \ln c_1 + \alpha_2 \ln c_2 + \alpha_3 \ln c_3,$$

les demandes walrassiennes consacrent des parts budgétaires constantes

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

Ici,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{4},$$

et la somme vaut

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Les parts budgétaires sont donc directement

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}.$$

Le revenu de  $B$  est

$$m_B = 100 + 100p_2 + 100p_3.$$

Les demandes sont donc :

$$c_1^B = \frac{1}{2} m_B = \frac{1}{2} (100 + 100p_2 + 100p_3) = 50 + 50p_2 + 50p_3,$$

$$c_2^B = \frac{1}{4} \frac{m_B}{p_2} = \frac{100 + 100p_2 + 100p_3}{4p_2} = \frac{25}{p_2} + 25 + 25 \frac{p_3}{p_2},$$

$$c_3^B = \frac{1}{4} \frac{m_B}{p_3} = \frac{100 + 100p_2 + 100p_3}{4p_3} = \frac{25}{p_3} + 25 \frac{p_2}{p_3} + 25.$$

Ainsi,

$$c_1^B = 50 + 50p_2 + 50p_3, \quad c_2^B = \frac{25}{p_2} + 25 + 25\frac{p_3}{p_2}, \quad c_3^B = \frac{25}{p_3} + 25\frac{p_2}{p_3} + 25.$$

**Remarque importante.** Les deux agents ont exactement les mêmes parts budgétaires :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}.$$

Cette propriété jouera un rôle central dans la détermination de l'équilibre et dans l'analyse de l'effet d'un transfert de revenu.

**Question 3. Conditions d'équilibre sur les marchés et détermination des prix d'équilibre. Étape 1 : ressources agrégées.** Les dotations totales de l'économie sont :

$$\bar{\omega}_1 = 0 + 100 = 100, \quad \bar{\omega}_2 = 100 + 100 = 200, \quad \bar{\omega}_3 = 200 + 100 = 300.$$

Donc la dotation agrégée est

$$\bar{\omega} = (100, 200, 300).$$

**Étape 2 : conditions d'équilibre général.** Un équilibre général walrassien est un vecteur de prix et une allocation tels que :

1. chaque agent maximise son utilité sous sa contrainte budgétaire ;
2. tous les marchés sont équilibrés.

Ici, les conditions d'équilibre sont :

$$\begin{aligned} c_1^A + c_1^B &= 100, \\ c_2^A + c_2^B &= 200, \\ c_3^A + c_3^B &= 300. \end{aligned}$$

**Rappel sur la loi de Walras.** Si tous les agents respectent leur contrainte budgétaire, alors la somme des demandes excédentaires valorisées aux prix est nulle :

$$p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) + p_3 z_3(p) = 0.$$

Comme  $p_1 = 1$ , cela devient

$$z_1(p) + p_2 z_2(p) + p_3 z_3(p) = 0.$$

Ainsi, parmi les trois équilibres de marché, un seul est redondant. Il suffit donc de résoudre deux équations indépendantes.

**Étape 3 : demande agrégée.** Comme les deux agents ont les mêmes parts budgétaires, la demande agrégée a la même structure. Le revenu total de l'économie est la valeur de la dotation agrégée :

$$M = 1 \cdot 100 + p_2 \cdot 200 + p_3 \cdot 300 = 100 + 200p_2 + 300p_3.$$

La demande agrégée s'écrit alors :

$$C_1 = \frac{1}{2}M, \quad C_2 = \frac{1}{4} \frac{M}{p_2}, \quad C_3 = \frac{1}{4} \frac{M}{p_3}.$$

Autrement dit,

$$C_1 = \frac{1}{2}(100 + 200p_2 + 300p_3),$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \frac{100 + 200p_2 + 300p_3}{p_2},$$

$$C_3 = \frac{1}{4} \frac{100 + 200p_2 + 300p_3}{p_3}.$$

**Étape 4 : résolution.**

*Marché du bien 1.* On impose

$$C_1 = 100.$$

Donc

$$\frac{1}{2}(100 + 200p_2 + 300p_3) = 100.$$

En multipliant par 2,

$$100 + 200p_2 + 300p_3 = 200.$$

Donc

$$200p_2 + 300p_3 = 100.$$

En divisant par 100,

$$2p_2 + 3p_3 = 1.$$

On note cette relation

$$\boxed{2p_2 + 3p_3 = 1.}$$

*Marché du bien 2.* On impose

$$C_2 = 200.$$

Donc

$$\frac{1}{4} \frac{100 + 200p_2 + 300p_3}{p_2} = 200.$$

Or, d'après l'équilibre sur le bien 1, on sait que

$$100 + 200p_2 + 300p_3 = 200.$$

On obtient donc

$$\frac{1}{4} \frac{200}{p_2} = 200.$$

Soit

$$\frac{50}{p_2} = 200.$$

D'où

$$\boxed{p_2^* = \frac{1}{4}.$$

*Marché du bien 3.* On utilise maintenant la relation

$$2p_2 + 3p_3 = 1.$$

En remplaçant  $p_2 = \frac{1}{4}$ , on obtient

$$2 \cdot \frac{1}{4} + 3p_3 = 1.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2} + 3p_3 = 1.$$

Donc

$$3p_3 = \frac{1}{2}, \quad p_3 = \frac{1}{6}.$$

Ainsi,

$$\boxed{p_3^* = \frac{1}{6}.$$

**Vérification sur le marché du bien 3.** Avec  $p_2 = \frac{1}{4}$  et  $p_3 = \frac{1}{6}$ , on a

$$M = 100 + 200 \cdot \frac{1}{4} + 300 \cdot \frac{1}{6} = 100 + 50 + 50 = 200.$$

Donc

$$C_3 = \frac{1}{4} \frac{M}{p_3} = \frac{1}{4} \frac{200}{1/6} = 50 \cdot 6 = 300,$$

ce qui coïncide bien avec l'offre totale du bien 3.

**Conclusion.** Les prix d'équilibre sont :

$$\boxed{(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right).$$

**Interprétation économique.** La structure des prix reflète la structure des dotations agrégées et des parts budgétaires. Comme l'économie consacre la moitié de son revenu au bien 1, et un quart à chacun des biens 2 et 3, les prix relatifs doivent être tels que la valeur de l'offre de chaque bien soit compatible avec cette répartition des dépenses.

**Question 4. Effet d'un transfert de revenu  $T$  de  $B$  vers  $A$ .** Un transfert monétaire de montant  $T$  est mis en place au profit de l'agent  $A$ , au détriment de l'agent  $B$ .

**Étape 1 : modification des revenus individuels.** Les nouveaux revenus deviennent :

$$m'_A = m_A + T, \quad m'_B = m_B - T.$$

Le revenu total de l'économie ne change pas :

$$m'_A + m'_B = (m_A + T) + (m_B - T) = m_A + m_B = M.$$

**Étape 2 : effet sur les demandes individuelles.** Comme les préférences des deux agents sont inchangées, chacun continue à consacrer

$$\frac{1}{2} \text{ de son revenu au bien 1, } \quad \frac{1}{4} \text{ au bien 2, } \quad \frac{1}{4} \text{ au bien 3.}$$

Les nouvelles demandes agrégées sont donc :

$$C'_1 = \frac{1}{2}m'_A + \frac{1}{2}m'_B = \frac{1}{2}(m'_A + m'_B) = \frac{1}{2}M,$$

$$C'_2 = \frac{1}{4} \frac{m'_A}{p_2} + \frac{1}{4} \frac{m'_B}{p_2} = \frac{1}{4} \frac{m'_A + m'_B}{p_2} = \frac{1}{4} \frac{M}{p_2},$$

$$C'_3 = \frac{1}{4} \frac{m'_A}{p_3} + \frac{1}{4} \frac{m'_B}{p_3} = \frac{1}{4} \frac{m'_A + m'_B}{p_3} = \frac{1}{4} \frac{M}{p_3}.$$

On voit immédiatement que

$$C'_1 = C_1, \quad C'_2 = C_2, \quad C'_3 = C_3.$$

**Conclusion.** La demande agrégée est inchangée pour tout vecteur de prix. Comme l'offre agrégée est elle aussi inchangée, les prix d'équilibre ne sont pas modifiés par le transfert.

Ainsi,

$$\boxed{p_2^* = \frac{1}{4}, \quad p_3^* = \frac{1}{6}}$$

restent les prix d'équilibre après le transfert.

**Interprétation économique.** Le transfert de revenu modifie la répartition du pouvoir d'achat entre  $A$  et  $B$ , mais il ne modifie pas le revenu total de l'économie. Or les deux agents ont exactement les mêmes parts budgétaires. Dès lors, la demande agrégée dépend uniquement du revenu total et non de sa répartition entre individus. C'est pourquoi le transfert n'a **aucun impact sur les prix d'équilibre**.

Autrement dit, dans cette économie particulière, la distribution du revenu entre les agents n'affecte pas les prix, car les préférences individuelles ont la même structure de demande en parts

budgétaires.

### Réponse finale pour l'exercice III.

Contraintes budgétaires :	$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A = 100p_2 + 200p_3,$ $c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 100 + 100p_2 + 100p_3,$
Demandes de A :	$c_1^A = 50p_2 + 100p_3,$ $c_2^A = 25 + 50\frac{p_3}{p_2},$ $c_3^A = 25\frac{p_2}{p_3} + 50,$
Demandes de B :	$c_1^B = 50 + 50p_2 + 50p_3,$ $c_2^B = \frac{25}{p_2} + 25 + 25\frac{p_3}{p_2},$ $c_3^B = \frac{25}{p_3} + 25\frac{p_2}{p_3} + 25,$
Prix d'équilibre :	$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right),$
Effet du transfert $T$ :	aucun effet sur les prix d'équilibre.

## 3 Rappels de cours utiles à la résolution des exercices

### 3.1 Rappels sur la théorie du consommateur

#### 1. Le problème de choix du consommateur

On considère un consommateur choisissant un panier de consommation

$$c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_+^n,$$

face à un vecteur de prix

$$p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_{++}^n.$$

Son revenu monétaire est noté  $m > 0$ . Lorsqu'il dispose non d'un revenu exogène, mais d'une dotation initiale  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , son revenu est alors égal à la valeur de cette dotation :

$$m = p \cdot \omega = \sum_{j=1}^n p_j \omega_j.$$

Le programme du consommateur s'écrit :

$$\max_{c \in \mathbb{R}_+^n} u(c_1, \dots, c_n)$$

sous la contrainte budgétaire

$$p \cdot c \leq m.$$

Dans une économie d'échanges, cette contrainte devient

$$p \cdot c \leq p \cdot \omega.$$

**Principe fondamental de construction de la contrainte budgétaire.** La contrainte budgétaire exprime toujours l'égalité ou l'inégalité entre :

$$\text{valeur des emplois} \leq \text{valeur des ressources}.$$

Ici :

- la *valeur des emplois* est la dépense de consommation, soit  $p \cdot c$  ;
- la *valeur des ressources* est soit le revenu monétaire  $m$ , soit, en économie d'échanges, la valeur de la dotation initiale  $p \cdot \omega$ .

Lorsque les préférences sont *localement non saturées* ou simplement strictement croissantes, le consommateur dépense tout son revenu à l'optimum. La contrainte budgétaire est donc saturée :

$$p \cdot c = m \quad \text{ou} \quad p \cdot c = p \cdot \omega.$$

## 2. Conditions marginales d'optimalité

Supposons que la solution soit *intérieure*, c'est-à-dire

$$c_j > 0 \quad \text{pour tout } j.$$

On peut alors écrire le lagrangien

$$\mathcal{L}(c, \lambda) = u(c) + \lambda(m - p \cdot c).$$

Les conditions du premier ordre sont

$$\frac{\partial u}{\partial c_j}(c) = \lambda p_j \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, n.$$

Si l'on note

$$Um_j(c) = \frac{\partial u}{\partial c_j}(c)$$

l'utilité marginale du bien  $j$ , on obtient

$$Um_j(c) = \lambda p_j.$$

En divisant par  $p_j$ , on obtient

$$\frac{Um_j(c)}{p_j} = \lambda \quad \text{pour tout } j.$$

D'où la condition fondamentale :

$$\boxed{\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} = \dots = \frac{Um_n}{p_n}}.$$

**Interprétation économique.** Le dernier euro dépensé dans chacun des biens doit procurer le même supplément d'utilité. Sinon, le consommateur pourrait augmenter son utilité en réallouant sa dépense vers le bien qui rapporte le plus d'utilité marginale par euro dépensé.

### 3. Taux marginal de substitution et tangence

Dans le cas de deux biens 1 et 2, le taux marginal de substitution du bien 1 au bien 2 est défini par

$$TMS_{1,2} = \frac{Um_1}{Um_2}.$$

Dans un optimum intérieur, la condition marginale précédente s'écrit alors

$$\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{Um_1}{Um_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Donc

$$\boxed{TMS_{1,2} = \frac{p_1}{p_2}}.$$

**Interprétation.** Le taux auquel le consommateur est prêt à substituer le bien 2 au bien 1 doit coïncider avec le taux auquel le marché permet cette substitution.

**Règle pratique de raisonnement.** Si, pour un panier donné,

$$\frac{Um_1}{p_1} > \frac{Um_2}{p_2},$$

alors le bien 1 procure plus d'utilité par euro dépensé que le bien 2. Le consommateur a donc intérêt à :

augmenter sa consommation de bien 1 et diminuer celle de bien 2.

Inversement, si

$$\frac{Um_1}{p_1} < \frac{Um_2}{p_2},$$

il faut diminuer la consommation du bien 1 et augmenter celle du bien 2.

#### 4. Neutralité monétaire et homogénéité de degré 0

Les demandes walrassiennes du consommateur sont homogènes de degré 0 en prix et revenu. Cela signifie que, pour tout  $\mu > 0$ ,

$$x(\mu p, \mu m) = x(p, m).$$

**Interprétation économique.** Si tous les prix et le revenu sont multipliés par un même facteur, les choix réels du consommateur ne changent pas. Seuls les prix relatifs et le pouvoir d'achat réel importent.

Cette propriété traduit l'absence d'illusion monétaire. Dans les exercices d'équilibre général, lorsqu'un bien est choisi comme numéraire, par exemple

$$p_1 = 1,$$

cela ne modifie pas les allocations réelles ; cela fixe seulement l'unité de compte.

#### 5. Demandes usuelles : cas Cobb–Douglas

Considérons une utilité de type Cobb–Douglas :

$$u(c_1, \dots, c_n) = c_1^{\alpha_1} \cdots c_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_j > 0.$$

Le problème du consommateur est

$$\max_{c \geq 0} \prod_{j=1}^n c_j^{\alpha_j} \quad \text{sous} \quad \sum_{j=1}^n p_j c_j = m.$$

Les demandes walrassiennes sont :

$$c_j^*(p, m) = \frac{\alpha_j}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \frac{m}{p_j} \quad \text{pour tout } j.$$

**Interprétation.** Le consommateur consacre au bien  $j$  la part budgétaire constante

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$

Ainsi, dans le cas à deux biens,

$$u(c_1, c_2) = c_1^\alpha c_2^\beta,$$

on obtient

$$c_1^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{m}{p_1}, \quad c_2^* = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{m}{p_2}.$$

En particulier :

— si

$$u(c_1, c_2) = c_1^2 c_2,$$

alors

$$c_1^* = \frac{2}{3} \frac{m}{p_1}, \quad c_2^* = \frac{1}{3} \frac{m}{p_2};$$

— si

$$u(c_1, c_2) = c_1 c_2^2,$$

alors

$$c_1^* = \frac{1}{3} \frac{m}{p_1}, \quad c_2^* = \frac{2}{3} \frac{m}{p_2};$$

— si

$$u(c_1, c_2, c_3) = c_1^2 c_2 c_3,$$

alors

$$c_1^* = \frac{1}{2} m, \quad c_2^* = \frac{1}{4} \frac{m}{p_2}, \quad c_3^* = \frac{1}{4} \frac{m}{p_3},$$

lorsque  $p_1 = 1$ .

## 6. Demandes usuelles : cas logarithmique pondéré

Considérons une utilité de la forme

$$u(c_1, \dots, c_n) = \beta_1 \ln c_1 + \dots + \beta_n \ln c_n, \quad \beta_j > 0.$$

Le problème est

$$\max_{c_j > 0} \sum_{j=1}^n \beta_j \ln c_j \quad \text{sous} \quad \sum_{j=1}^n p_j c_j = m.$$

Les demandes walrassiennes sont :

$$c_j^*(p, m) = \frac{\beta_j}{\beta_1 + \dots + \beta_n} \frac{m}{p_j} \quad \text{pour tout } j.$$

**Interprétation.** Les coefficients  $\beta_j$  déterminent directement les parts budgétaires.

Ainsi, dans le cas

$$u(c_1, c_2) = \frac{1}{4} \ln c_1 + \frac{1}{2} \ln c_2,$$

comme

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

on obtient

$$c_1^* = \frac{1/4}{3/4} \frac{m}{p_1} = \frac{1}{3} \frac{m}{p_1}, \quad c_2^* = \frac{1/2}{3/4} \frac{m}{p_2} = \frac{2}{3} \frac{m}{p_2}.$$

De même, si

$$u(c_1, c_2, c_3) = \frac{1}{2} \ln c_1 + \frac{1}{4} \ln c_2 + \frac{1}{4} \ln c_3,$$

alors les parts budgétaires sont

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}.$$

## 7. Gains à l'échange entre deux agents

Dans une économie d'échanges à deux biens, deux agents  $A$  et  $B$  peuvent réaliser des échanges mutuellement avantageux si leurs taux marginaux de substitution diffèrent :

$$TMS_{1,2}^A \neq TMS_{1,2}^B.$$

**Interprétation.** Les deux agents n'évaluent pas de la même manière le taux de substitution entre les biens. Il existe donc un rapport d'échange intermédiaire qui améliore la situation des deux.

À l'inverse, à une allocation intérieure Pareto-efficace, on doit avoir

$$TMS_{1,2}^A = TMS_{1,2}^B.$$

Dans un équilibre concurrentiel intérieur, cette égalité s'écrit plus précisément

$$TMS_{1,2}^A = TMS_{1,2}^B = \frac{p_1}{p_2}.$$

## 3.2 Rappels sur la théorie du producteur

### 1. Le problème de minimisation des coûts

On considère une entreprise utilisant  $n$  facteurs de production

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$$

pour produire une quantité  $q \geq 0$  selon une technologie

$$q = f(x_1, \dots, x_n).$$

Les prix des facteurs sont

$$w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}_{++}^n.$$

Pour produire une quantité donnée  $\bar{q} > 0$ , l'entreprise résout :

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+^n} \sum_{j=1}^n w_j x_j$$

sous la contrainte

$$f(x) \geq \bar{q}.$$

**Rappel fondamental.** Si la fonction de production est croissante en chacun des facteurs, alors la contrainte technologique est saturée à l'optimum :

$$\boxed{f(x) = \bar{q}.}$$

En effet, produire strictement plus que la quantité demandée impliquerait une dépense inutile.

## 2. Conditions marginales d'optimalité

Le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n w_j x_j + \lambda(\bar{q} - f(x)).$$

Les conditions du premier ordre donnent, pour tout facteur  $j$ ,

$$w_j = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Si l'on note

$$Pm_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

la productivité marginale du facteur  $j$ , on obtient

$$w_j = \lambda Pm_j.$$

En divisant par  $w_j$ , on en déduit

$$\frac{Pm_j}{w_j} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{pour tout } j.$$

Donc, à l'optimum intérieur :

$$\boxed{\frac{Pm_1}{w_1} = \frac{Pm_2}{w_2} = \dots = \frac{Pm_n}{w_n}.}$$

**Interprétation économique.** Le dernier euro dépensé dans chacun des facteurs doit procurer le même supplément de production. Sinon, l'entreprise pourrait réduire son coût en substituant un facteur à un autre.

### 3. Taux marginal de substitution technique

Dans le cas de deux facteurs  $x_1$  et  $x_2$ , la condition précédente s'écrit

$$\frac{Pm_1}{w_1} = \frac{Pm_2}{w_2} \iff \frac{Pm_1}{Pm_2} = \frac{w_1}{w_2}.$$

On définit le taux marginal de substitution technique entre les facteurs 1 et 2 par

$$TMST_{1,2} = \frac{Pm_1}{Pm_2}.$$

La condition de tangence entre isoquante et isocoût devient alors

$$\boxed{TMST_{1,2} = \frac{w_1}{w_2}.$$

**Règle pratique de raisonnement.** Si, pour une combinaison productive donnée,

$$\frac{Pm_1}{w_1} > \frac{Pm_2}{w_2},$$

alors le facteur 1 procure plus de production par euro dépensé que le facteur 2. Il faut donc :

augmenter le facteur 1 et diminuer le facteur 2.

Inversement, si

$$\frac{Pm_1}{w_1} < \frac{Pm_2}{w_2},$$

il faut diminuer le facteur 1 et augmenter le facteur 2.

### 4. Fonction de coût, coût moyen, coût marginal

La fonction de coût est définie par

$$C(\bar{q}, w) = \min_{x \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^n w_j x_j ; f(x) \geq \bar{q} \right\}.$$

Une fois  $C(\bar{q}, w)$  obtenue, on définit :

$$\boxed{CM(\bar{q}) = \frac{C(\bar{q}, w)}{\bar{q}}}$$

le coût moyen, et

$$\boxed{Cm(\bar{q}) = \frac{\partial C(\bar{q}, w)}{\partial \bar{q}}}$$

le coût marginal, lorsque la fonction de coût est dérivable.

**Interprétation.**

- le coût moyen mesure le coût par unité produite ;
- le coût marginal mesure le coût d'une unité supplémentaire.

**5. Maximisation du profit et offre de l'entreprise concurrentielle**

Sous concurrence pure et parfaite, le prix du bien est pris comme donné par l'entreprise et noté  $p$ . L'entreprise choisit sa production  $q$  pour maximiser

$$\pi(q) = pq - C(q, w).$$

Le programme est donc

$$\max_{q \geq 0} pq - C(q, w).$$

Si la solution est intérieure et si la fonction de coût est différentiable, la condition du premier ordre s'écrit

$$p - Cm(q) = 0.$$

Donc

$$\boxed{p = Cm(q).}$$

**Interprétation.** L'entreprise produit jusqu'au point où le prix est égal au coût marginal.

Si, au contraire, le coût marginal est constant, comme dans certains cas de rendements constants à l'échelle, l'offre individuelle prend la forme d'une *correspondance* :

$$q^s = \begin{cases} 0 & \text{si } p < Cm, \\ \text{tout } q \geq 0 & \text{si } p = Cm, \\ \text{pas d'optimum fini} & \text{si } p > Cm. \end{cases}$$

**6. Fonctions de production Cobb–Douglas**

On rencontre fréquemment des fonctions de production de type Cobb–Douglas :

$$f(x_1, \dots, x_n) = A \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}, \quad A > 0, \quad \alpha_j > 0.$$

a) **Productivités marginales.** Pour tout facteur  $j$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \alpha_j A x_j^{\alpha_j - 1} \prod_{k \neq j} x_k^{\alpha_k}.$$

En utilisant  $q = f(x)$ , on peut réécrire cette expression sous la forme

$$Pm_j = \alpha_j \frac{q}{x_j}.$$

Cette relation est extrêmement utile dans les calculs.

b) **Rendements à l'échelle.** La somme des exposants

$$\rho = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

détermine les rendements à l'échelle :

$$\begin{cases} \rho < 1 & \text{rendements décroissants à l'échelle,} \\ \rho = 1 & \text{rendements constants à l'échelle,} \\ \rho > 1 & \text{rendements croissants à l'échelle.} \end{cases}$$

c) **Théorème d'Euler.** Si  $f$  est homogène de degré  $\rho$ , alors

$$\sum_{j=1}^n Pm_j x_j = \rho q.$$

Dans le cas Cobb–Douglas précédent, on obtient donc

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j q = \rho q.$$

## 7. Parts factorielles et part du profit

Supposons que l'entreprise maximise son profit en choisissant directement ses facteurs :

$$\max_{x \geq 0} pf(x) - \sum_{j=1}^n w_j x_j.$$

Les conditions du premier ordre donnent

$$p Pm_j = w_j \quad \text{pour tout } j.$$

En multipliant par  $x_j$ , on obtient

$$w_j x_j = p P m_j x_j.$$

Dans le cas d'une fonction Cobb–Douglas,

$$P m_j x_j = \alpha_j q.$$

Donc

$$\boxed{w_j x_j = \alpha_j p q.}$$

**Interprétation.** La rémunération du facteur  $j$  représente la part  $\alpha_j$  du chiffre d'affaires.

Ainsi, pour

$$q = K^{1/4} L^{1/2},$$

on a

$$\alpha_K = \frac{1}{4}, \quad \alpha_L = \frac{1}{2}, \quad \rho = \frac{3}{4}.$$

Donc

$$rK = \frac{1}{4} p Q, \quad wL = \frac{1}{2} p Q.$$

La part du profit dans le chiffre d'affaires vaut alors

$$1 - \rho = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

De même, pour

$$q = K^{1/4} L^{1/4},$$

on a

$$\alpha_K = \frac{1}{4}, \quad \alpha_L = \frac{1}{4}, \quad \rho = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$rK = \frac{1}{4} p Q, \quad wL = \frac{1}{4} p Q,$$

et la part du profit dans le chiffre d'affaires vaut

$$1 - \rho = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Plus généralement, si  $f$  est homogène de degré  $\rho$ , alors, en sommant les rémunérations factorielles,

$$\sum_{j=1}^n w_j x_j = p \sum_{j=1}^n P m_j x_j = p \rho q.$$

D'où

$$\boxed{\pi = p q - \sum_{j=1}^n w_j x_j = (1 - \rho) p q.}$$

On en déduit immédiatement :

$$\frac{\pi}{pq} = 1 - \rho.$$

En particulier :

- si  $\rho = 1$ , alors  $\pi = 0$  : le profit est nul à l'équilibre concurrentiel ;
- si  $\rho < 1$ , alors  $\pi > 0$  : le profit est positif.

### 8. Cas important : rendements constants à l'échelle

Lorsque  $\rho = 1$ , la technologie présente des rendements constants à l'échelle. Dans ce cas :

- le coût total est linéaire en la production ;
- le coût moyen est constant ;
- le coût marginal est égal au coût moyen ;
- à l'équilibre concurrentiel, on a nécessairement

$$p = CM = Cm;$$

- le profit est nul.

Cette propriété explique les cas dans lesquels l'offre individuelle n'est pas une fonction ordinaire mais une correspondance.

---

## 3.3 Rappels sur la théorie de l'équilibre général en économie d'échanges

### 1. Cadre général

On considère une économie d'échanges avec :

- $I$  agents, indexés par  $i = 1, \dots, I$  ;
- $L$  biens, indexés par  $\ell = 1, \dots, L$  ;
- pour chaque agent  $i$ , une dotation initiale

$$\omega^i = (\omega_1^i, \dots, \omega_L^i) \in \mathbb{R}_+^L;$$

- pour chaque agent  $i$ , une fonction d'utilité

$$u^i(c^i), \quad c^i = (c_1^i, \dots, c_L^i) \in \mathbb{R}_+^L.$$

Le vecteur de prix est

$$p = (p_1, \dots, p_L) \in \mathbb{R}_{++}^L.$$

## 2. Contraintes budgétaires individuelles

À prix donnés, l'agent  $i$  peut vendre sa dotation initiale et acheter le panier qu'il souhaite. Son revenu est donc la valeur de sa dotation :

$$m_i = p \cdot \omega^i = \sum_{\ell=1}^L p_\ell \omega_\ell^i.$$

Sa contrainte budgétaire est

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\sum_{\ell=1}^L p_\ell c_\ell^i \leq \sum_{\ell=1}^L p_\ell \omega_\ell^i.}$$

Lorsque les préférences sont localement non saturées, cette contrainte est saturée :

$$\boxed{p \cdot c^i = p \cdot \omega^i.}$$

**Principe fondamental.** Comme pour la théorie du consommateur en revenu, la contrainte budgétaire traduit l'égalité entre la valeur des emplois et la valeur des ressources :

dépense de consommation = valeur de la dotation initiale.

## 3. Demandes walrassiennes

Pour chaque agent  $i$ , la demande walrassienne est la solution du programme

$$\max_{c^i \in \mathbb{R}_+^L} u^i(c^i)$$

sous la contrainte

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i.$$

On la note souvent

$$x^i(p, p \cdot \omega^i).$$

Ces demandes sont homogènes de degré 0 en prix et revenu :

$$x^i(\mu p, \mu m_i) = x^i(p, m_i) \quad \text{pour tout } \mu > 0.$$

**Conséquence importante.** On peut normaliser un prix, par exemple

$$p_1 = 1,$$

sans modifier les allocations réelles. Le bien 1 joue alors le rôle de numéraire.

#### 4. Définition de l'équilibre général walrassien

Un équilibre général walrassien est constitué d'un vecteur de prix

$$p^* = (p_1^*, \dots, p_L^*)$$

et d'une allocation

$$(c^{1*}, \dots, c^{I*})$$

tels que :

1. pour tout agent  $i$ ,  $c^{i*}$  maximise  $u^i$  sous la contrainte budgétaire

$$p^* \cdot c^i \leq p^* \cdot \omega^i;$$

2. pour tout bien  $\ell$ , le marché est équilibré :

$$\sum_{i=1}^I c_\ell^{i*} = \sum_{i=1}^I \omega_\ell^i.$$

En notant

$$\bar{\omega}_\ell = \sum_{i=1}^I \omega_\ell^i$$

la dotation agrégée en bien  $\ell$ , les conditions d'équilibre s'écrivent

$$\boxed{\sum_{i=1}^I c_\ell^{i*} = \bar{\omega}_\ell \quad \text{pour tout } \ell = 1, \dots, L.}$$

#### 5. Demande excédentaire et loi de Walras

On définit la demande excédentaire agrégée par

$$z(p) = \sum_{i=1}^I x^i(p, p \cdot \omega^i) - \sum_{i=1}^I \omega^i.$$

Ses composantes sont

$$z_\ell(p) = \sum_{i=1}^I x_\ell^i(p, p \cdot \omega^i) - \bar{\omega}_\ell.$$

La loi de Walras affirme que

$$\boxed{p \cdot z(p) = 0.}$$

Autrement dit,

$$\sum_{\ell=1}^L p_\ell z_\ell(p) = 0.$$

**Interprétation.** La valeur totale des demandes excédentaires est nulle lorsque chaque agent respecte sa contrainte budgétaire.

**Conséquence pratique.** Dans une économie à  $L$  biens, une des  $L$  conditions d'équilibre de marché est redondante. Il suffit d'en résoudre  $L - 1$ .

Ainsi :

- avec 2 biens, une seule équation d'équilibre indépendante suffit ;
- avec 3 biens, deux équations indépendantes suffisent.

## 6. Équilibre intérieur : égalisation des TMS

Dans une économie d'échanges à deux biens, si l'équilibre est intérieur pour tous les agents, alors chaque agent satisfait

$$TMS_{1,2}^i = \frac{p_1}{p_2}.$$

On obtient donc

$$\boxed{TMS_{1,2}^1 = TMS_{1,2}^2 = \dots = \frac{p_1}{p_2}.$$

**Interprétation.** À l'équilibre concurrentiel intérieur :

- chaque agent choisit un panier optimal compte tenu des prix ;
- tous les agents font face au même système de prix ;
- les évaluations marginales relatives des biens coïncident donc.

Cette propriété permet souvent de relier l'équilibre concurrentiel et l'efficacité au sens de Pareto.

## 7. Demandes agrégées lorsque les parts budgétaires sont identiques

Supposons que, pour tous les agents, les demandes aient la même structure en parts budgétaires. Par exemple, pour chaque agent  $i$ ,

$$x_\ell^i(p, m_i) = \theta_\ell \frac{m_i}{p_\ell}, \quad \theta_\ell > 0, \quad \sum_{\ell=1}^L \theta_\ell = 1.$$

C'est le cas, en particulier, lorsque les agents ont des préférences Cobb–Douglas ou logarithmiques pondérées avec les *mêmes poids budgétaires*.

Alors la demande agrégée pour le bien  $\ell$  est

$$\sum_{i=1}^I x_\ell^i(p, m_i) = \theta_\ell \frac{1}{p_\ell} \sum_{i=1}^I m_i.$$

Donc

$$X_\ell(p) = \theta_\ell \frac{M}{p_\ell}, \quad M = \sum_{i=1}^I m_i.$$

Or

$$M = \sum_{i=1}^I p \cdot \omega^i = p \cdot \sum_{i=1}^I \omega^i,$$

c'est-à-dire la valeur de la dotation agrégée.

**Conséquence essentielle.** Lorsque tous les agents ont les mêmes parts budgétaires, la demande agrégée dépend seulement :

- des prix ;
- de la dotation agrégée ;
- et non de la répartition individuelle des dotations.

Par conséquent, une redistribution de revenu ou de dotations entre agents, à dotation agrégée inchangée, ne modifie pas les prix d'équilibre.

## 8. Application directe aux exercices traités

Les exercices résolus dans ce recueil mobilisent de manière récurrente les idées suivantes :

### 1. Construction des contraintes budgétaires :

$$p \cdot c^i = p \cdot \omega^i.$$

2. **Demandes Cobb–Douglas ou logarithmiques :**

$$c_\ell^i = \text{part budgétaire du bien } \ell \times \frac{m_i}{p_\ell}.$$

3. **Choix d'un numéraire :**

$$p_1 = 1,$$

sans effet réel sur les allocations.

4. **Conditions d'équilibre de marché :**

$$\sum_i c_\ell^i = \sum_i \omega_\ell^i.$$

5. **Utilisation de la loi de Walras :** il suffit de résoudre  $L - 1$  marchés.

6. **Invariance éventuelle des prix à une redistribution :** lorsque les parts budgétaires des agents sont identiques, la demande agrégée ne dépend pas de la répartition des revenus.

Ces rappels constituent l'ossature analytique de la quasi-totalité des exercices de microéconomie élémentaire portant sur la théorie du consommateur, la théorie du producteur et l'équilibre général en économie d'échanges.