

# Une brève introduction à la microéconomie

Philippe BERNARD  
Ingénierie Economique et Financière  
Université Paris-Dauphine

5 mai 2026

### **Mise en garde**

Ce document constitue une première version de travail. Il est susceptible de comporter des erreurs, des imprécisions ou des coquilles.

Les commentaires, suggestions et corrections sont les bienvenus.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 La microéconomie : institutions, agents et règles du jeu</b>	<b>7</b>
1.1 Une représentation de l'activité économique . . . . .	7
1.2 Le cadre institutionnel des échanges . . . . .	8
1.3 Les prix comme signaux et comme paramètres . . . . .	8
1.4 La concurrence pure et parfaite comme cadre de référence . . . . .	9
<b>2 La théorie du consommateur</b>	<b>10</b>
2.1 Les biens . . . . .	10
2.2 Les préférences . . . . .	12
2.3 Courbes d'indifférence et taux marginal de substitution . . . . .	14
2.4 La contrainte budgétaire . . . . .	18
2.5 Disposition marginale à payer, coût d'opportunité et équilibre du consommateur .	20
2.6 Préférences et fonctions d'utilité . . . . .	23
2.7 Utilités marginales, dispositions marginales et demandes . . . . .	27
Exercices corrigés . . . . .	33
<b>3 La théorie du producteur</b>	<b>35</b>
3.1 La production et la technologie . . . . .	35
3.2 Isoquantes et taux marginal de substitution technique . . . . .	37
3.3 Coûts, prix des facteurs et droite d'isocoût . . . . .	38
3.4 Choix du producteur : minimisation des coûts . . . . .	41
3.5 Fonction de coût et demandes de facteurs . . . . .	43
3.6 Objectif de l'entreprise : fondements et limites de la maximisation du profit . . .	46
3.7 Maximisation du profit . . . . .	49
3.8 Rendements d'échelle et structure de marché . . . . .	51
3.9 Extension : production jointe et frontières de transformation . . . . .	54
<b>4 L'équilibre général en économie d'échange</b>	<b>60</b>
4.1 Introduction . . . . .	60
4.2 Une économie d'échange : cadre et notations . . . . .	61
4.3 La boîte d'Edgeworth, le noyau et la coordination des échanges . . . . .	63
4.4 L'équilibre général concurrentiel . . . . .	67

4.5	Réplication de l'économie . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Optimum de Pareto et courbe des contrats</b>	<b>75</b>
5.1	Introduction . . . . .	75
5.2	Le critère de Pareto . . . . .	76
5.3	Caractérisation des optima de Pareto dans l'économie d'échange . . . . .	78
5.4	Courbe des contrats et représentation géométrique de l'efficacité . . . . .	80
5.5	Équilibre concurrentiel et optimum de Pareto . . . . .	82
5.6	Le second théorème du bien-être . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Équilibre général et optima de Pareto en économie de production</b>	<b>89</b>
6.1	Introduction . . . . .	89
6.2	Le cadre d'une économie avec production . . . . .	90
6.3	Équilibre général avec production . . . . .	93
6.4	Optimum de Pareto avec production . . . . .	95
6.5	Équilibre concurrentiel et optimum de Pareto en économie de production . . . . .	97
6.6	L'agent représentatif : agrégation et limites . . . . .	99
	<b>Conclusion</b>	<b>106</b>

# Introduction

Les sciences sociales ne se sont constituées que lentement. Longtemps mêlées à la philosophie morale, à la réflexion juridique et à la pensée politique, elles n’ont acquis que progressivement leur autonomie intellectuelle et leurs méthodes propres. L’économie n’échappe pas à cette histoire. Bien qu’ancienne par certains de ses thèmes, elle n’a élaboré que tardivement les catégories analytiques qui structurent aujourd’hui son enseignement.

Les termes mêmes de *microéconomie* et de *macroéconomie*, aujourd’hui au cœur du vocabulaire des économistes, sont d’apparition relativement récente. Si la distinction conceptuelle entre analyse des comportements individuels et analyse des grandeurs agrégées peut être retracée dans des travaux bien antérieurs, notamment chez les classiques, elle ne reçoit une formulation explicite qu’au cours des années 1930. Le futur Prix Nobel, père de l’économétrie, Ragnar Frisch [Frisch, 1933] introduit ainsi dès 1933 la distinction entre *micro-dynamique* et *macro-dynamique*, posant les bases d’une différenciation analytique appelée à se structurer progressivement.

Il est toutefois remarquable que les grands textes fondateurs de la théorie économique moderne n’emploient pas ces termes. Ni Hicks dans *Value and Capital* [Hicks, 1939] en 1939, ni même Keynes dans la *General Theory* [Keynes, 1936] ne mobilisent cette terminologie, bien que leurs analyses constituent aujourd’hui les archétypes respectifs de la microéconomie et de la macroéconomie. Ce décalage entre les concepts et les mots illustre le caractère progressif de la formalisation de la discipline.

Les termes eux-mêmes n’apparaissent que progressivement dans la littérature, d’abord de manière encore hésitante dans les années 1930 et 1940, notamment dans certains travaux empiriques et économétriques — on en trouve par exemple des occurrences chez Lawrence Klein à la fin des années 1940 [Klein, 1946] — avant de se diffuser plus largement dans l’enseignement et les manuels à partir des années 1950. Ce n’est qu’à cette période que s’imposent des intitulés désormais classiques tels que *Microeconomic Theory* [Henderson and Quandt, 1958] de Henderson et Quandt, accompagnant l’institutionnalisation de la discipline.

Cette évolution terminologique reflète moins une rupture qu’un processus de clarification et de structuration progressive des objets de l’analyse économique. Elle rappelle que les catégories aujourd’hui familières de la microéconomie et de la macroéconomie ne constituent pas des divisions naturelles et intemporelles de la discipline, mais le produit d’une histoire intellectuelle relativement récente.

Le présent document ne prétend nullement embrasser l’ensemble du champ microéconomique. Il n’en constitue qu’une introduction partielle et nécessairement sélective. La microéconomie

contemporaine forme en effet un domaine d'une grande richesse, traversé par des débats théoriques, des raffinements conceptuels et des développements techniques qu'il serait illusoire de vouloir condenser en quelques chapitres introductifs. L'ambition de ce texte est donc plus limitée, mais peut-être plus essentielle : il s'agit d'exposer avec clarté certains des raisonnements fondamentaux qui soutiennent une large part de la théorie économique. Pour des présentations plus complètes, on pourra consulter des ouvrages classiques comme [Varian, 1992], [Varian, 2014], [Mas-Colell et al., 1995], [Picard, 2011], [Jehle and Reny, 2001], [Kreps, 1990].

La microéconomie propose, avant toute chose, une certaine représentation de la vie économique. Dans cette représentation, les activités d'échange et de production sont envisagées comme s'organisant principalement sur des marchés. Ceux-ci ne doivent pas être entendus seulement comme des lieux physiques, mais plus généralement comme des dispositifs institutionnels permettant la rencontre des offres et des demandes, la formation de prix, et la coordination de décisions prises de manière décentralisée. Très souvent, la référence implicite de cette représentation est fournie par les marchés organisés, tels que les marchés de matières premières ou les marchés financiers, dont l'histoire est ancienne et dont la sophistication contractuelle s'est considérablement développée au fil des siècles.

Une telle représentation suppose un cadre institutionnel qu'il convient de rendre explicite. Parler de marché, c'est en effet supposer définis des biens ou des services susceptibles d'être échangés, des droits attachés à ces échanges, ainsi que des modalités contractuelles rendant possible leur exécution. C'est également supposer que les agents disposent d'une information au moins suffisante sur les prix, et qu'ils orientent leurs choix en fonction de ces derniers. Ainsi, les prix apparaissent comme des signaux publics à partir desquels les agents arrêtent leurs décisions.

L'une des règles du jeu les plus profondes de la microéconomie élémentaire réside précisément dans cette hypothèse : les agents prennent les prix comme des données. Consommateurs et producteurs ne sont pas supposés choisir les prix ; ils les tiennent pour des paramètres extérieurs à leur volonté propre. Ils déterminent en revanche, compte tenu de ces prix, les quantités qu'ils souhaitent demander, offrir, consommer ou produire. Le cadre ainsi dessiné est celui de la concurrence pure et parfaite, entendue ici dans son sens le plus opératoire : un régime dans lequel chaque agent traite les prix comme donnés, et dans lequel l'équilibre correspond à une configuration de prix telle que, sur chaque marché, les offres et les demandes se trouvent égalisées.

Cette manière de présenter la coordination économique est familière, mais elle n'a rien d'évident. Elle a fait l'objet, depuis longtemps, de discussions et de controverses. Le rôle joué par Walras [Walras, 1874] dans l'élaboration de cette vision est décisif, même si son interprétation a souvent donné lieu à des lectures divergentes. Plus largement, la notion même de concurrence pure et parfaite, centrale dans l'édifice théorique, n'a cessé d'être interrogée, précisée, reformulée. Les débats anciens, comme ceux qui opposèrent Walras à Barone [Barone, 1908], et les analyses plus récentes, notamment celles d'Ostroy et de Makowski [Ostroy, 1980] [Makowski and Ostroy, 1995], témoignent de la difficulté à cerner rigoureusement ce qui est pourtant tenu, dans l'enseignement élémentaire, pour le cadre de référence de la théorie des marchés. Dans les pages qui suivent, nous adopterons délibérément une formulation simple de cette idée, non parce qu'elle épuiserait la question, mais parce qu'elle permet d'en faire saisir la logique essentielle.

Dans ce cadre, la microéconomie met en scène deux figures majeures : le consommateur et

le producteur. Le premier est caractérisé, dans la théorie la plus simple, par ses préférences et par ses ressources ; le second, par sa technologie et par l'objectif qu'on lui prête, à savoir la maximisation du profit. Chacune de ces représentations soulève des difficultés bien connues. L'assimilation du consommateur à un agent unique doté d'un ordre cohérent de préférences laisse dans l'ombre la complexité des décisions collectives au sein des ménages. De même, l'identification du producteur à une entité poursuivant sans ambiguïté la maximisation du profit peut paraître fragile dès lors que l'on considère la diversité des organisations productives et la pluralité de leurs objectifs effectifs. Ces objections sont sérieuses. Elles n'interdisent pourtant pas de retenir, à titre de point de départ, ces figures élémentaires, pourvu que l'on n'oublie jamais le caractère construit et simplificateur des hypothèses mobilisées.

L'objet de ce texte n'est donc pas de dissimuler les fragilités du cadre de base, mais d'en présenter avec méthode les articulations principales. L'étudiant y rencontrera les notions de préférences, de contrainte budgétaire, de choix optimal, de technologie, d'offre, de demande, d'équilibre et d'efficacité. Mais au-delà de ces notions particulières, il s'agira surtout de faire apparaître une manière de raisonner : celle qui, à partir d'agents soumis à des contraintes et guidés par des prix, reconstruit les formes élémentaires de la coordination économique.

Le lecteur est ainsi invité non à parcourir l'ensemble de la microéconomie, ce qui excéderait de beaucoup le propos de ce document, mais à se familiariser avec quelques-uns de ses raisonnements les plus fondamentaux. En ce sens, ce texte voudrait être moins un inventaire qu'une initiation : une entrée dans les règles du jeu de la microéconomie.

# Chapitre 1

## La microéconomie : institutions, agents et règles du jeu

### 1.1. Une représentation de l'activité économique

La microéconomie propose une représentation stylisée de l'activité économique, dont il importe de saisir d'emblée la logique. Dans cette représentation, les interactions entre agents — qu'il s'agisse d'échanger, de consommer ou de produire — sont envisagées comme s'inscrivant principalement dans le cadre de marchés. L'économie y apparaît ainsi comme un ensemble de décisions décentralisées, prises par une multiplicité d'agents, et coordonnées par l'intermédiaire de prix.

Une telle manière de voir ne va pas de soi. Elle repose sur une simplification majeure : celle qui consiste à ramener la diversité des formes d'organisation économique à un schéma unique, celui de l'échange marchand. De nombreuses activités économiques échappent en réalité, partiellement ou totalement, à ce cadre — qu'il s'agisse des organisations hiérarchiques, des institutions publiques, ou encore des relations informelles. Néanmoins, la représentation marchande constitue le point d'entrée privilégié de l'analyse microéconomique, en raison de la clarté des mécanismes qu'elle permet de dégager.

Il convient également de souligner que la notion de marché ne doit pas être entendue dans un sens étroitement géographique. Un marché n'est pas nécessairement un lieu physique ; il désigne plus généralement un dispositif, souvent abstrait, au sein duquel des offres et des demandes se rencontrent et où se forment des prix. À cet égard, les marchés organisés — notamment les marchés financiers ou les marchés de matières premières — fournissent une référence implicite particulièrement influente. Ces marchés, dont l'histoire remonte à plusieurs siècles, offrent des exemples où les biens échangés sont précisément définis, où les règles de transaction sont explicites, et où les prix sont publiquement observables.

Ainsi, dès ce premier niveau de description, la microéconomie invite à considérer l'activité économique comme un système d'échanges coordonnés par des prix, au sein de dispositifs institutionnels que l'on désigne sous le terme général de marchés.

## 1.2. Le cadre institutionnel des échanges

Parler de marchés suppose implicitement l'existence d'un cadre institutionnel sans lequel les échanges ne pourraient avoir lieu. Ce cadre, bien que rarement détaillé dans les modèles élémentaires, en constitue une condition de possibilité.

En premier lieu, les biens et services échangés doivent être définis de manière suffisamment précise pour pouvoir faire l'objet de transactions. Cette définition inclut non seulement leurs caractéristiques physiques, mais également les droits qui leur sont attachés : droit d'usage, de transfert, de transformation, etc. Autrement dit, toute transaction marchande repose sur une forme, explicite ou implicite, de contractualisation.

En second lieu, les échanges supposent l'existence de règles permettant d'en assurer la réalisation. Ces règles concernent notamment la formation des contrats, leur exécution, et les recours en cas de litige. Dans les marchés organisés, ces éléments sont formalisés et encadrés par des institutions spécifiques ; dans d'autres contextes, ils peuvent reposer sur des normes sociales ou juridiques plus diffuses. Dans tous les cas, la possibilité même de l'échange repose sur un ensemble de conventions et de garanties.

Enfin, les marchés impliquent une certaine forme de publicité de l'information, au premier rang de laquelle figurent les prix. Pour que les agents puissent orienter leurs décisions, encore faut-il qu'ils aient accès, au moins de manière approximative, aux conditions auxquelles les échanges peuvent s'effectuer. Les prix apparaissent ainsi comme des informations synthétiques, condensant un ensemble de données relatives aux conditions de l'offre et de la demande.

Ces différents éléments — définition des biens, cadre contractuel, règles d'échange, information sur les prix — sont le plus souvent laissés dans l'ombre dans l'analyse microéconomique de base. Ils n'en constituent pas moins l'arrière-plan indispensable sur lequel celle-ci se déploie.

## 1.3. Les prix comme signaux et comme paramètres

Au cœur de la représentation microéconomique se trouve le rôle attribué aux prix. Ceux-ci remplissent une double fonction, qu'il convient de distinguer avec soin.

D'une part, les prix sont des signaux. Ils véhiculent une information relative à la rareté des biens et aux conditions de leur échange. Un prix élevé indique, toutes choses égales par ailleurs, qu'un bien est relativement rare ou fortement demandé ; un prix faible suggère au contraire une abondance relative ou une demande limitée. En ce sens, les prix contribuent à orienter les décisions individuelles en fournissant des indications synthétiques sur l'état du système économique.

D'autre part — et c'est ici une hypothèse décisive — les prix sont traités par les agents comme des paramètres. Cela signifie que, dans le cadre de la concurrence pure et parfaite, chaque agent considère les prix comme donnés, indépendants de ses propres choix. Le consommateur ne choisit pas les prix auxquels il achète les biens ; il choisit les quantités qu'il consomme compte tenu de ces prix. De même, le producteur ne fixe pas les prix de ses produits ; il détermine les quantités qu'il offre en fonction des prix qu'il observe.

Cette hypothèse de prise de prix (*price-taking*) constitue l'une des règles du jeu les plus fondamentales de la microéconomie. Elle opère une dissociation nette entre, d'une part, la formation des prix — laissée en quelque sorte au système dans son ensemble — et, d'autre part, les décisions

individuelles, qui prennent ces prix comme des données.

Une telle hypothèse est évidemment discutable. Dans de nombreux contextes, les agents disposent d'un pouvoir de marché qui leur permet d'influencer les prix. Néanmoins, la théorie microéconomique de base choisit de faire abstraction de ces situations afin de mettre en évidence, dans un cadre simplifié, les mécanismes de coordination par les prix.

#### 1.4. La concurrence pure et parfaite comme cadre de référence

La notion de concurrence pure et parfaite occupe une place centrale dans l'édifice microéconomique. Elle sert de cadre de référence à l'analyse des marchés et à la compréhension du rôle des prix. Pourtant, cette notion est à la fois familière et difficile à cerner avec précision.

Historiquement, elle est associée aux travaux de Léon Walras, qui propose une représentation de l'économie comme un système de marchés interdépendants, dans lequel les prix assurent la coordination des décisions individuelles. Cette représentation a donné lieu, dès l'origine, à des discussions et à des critiques. Des auteurs comme Barone [Barone, 1908] ont interrogé les conditions sous lesquelles un tel système pouvait fonctionner, tandis que des contributions plus récentes, notamment celles d'Ostroy et de Makowski [Ostroy, 1980] [Makowski and Ostroy, 1995], ont cherché à préciser les fondements institutionnels et informationnels de la concurrence.

Ces débats témoignent du caractère problématique de la notion. Faut-il définir la concurrence par le nombre d'agents ? Par leur taille relative ? Par la nature de l'information dont ils disposent ? Par les institutions qui organisent les échanges ? Aucune de ces approches ne s'est imposée de manière définitive.

Dans ce document, nous retiendrons une définition volontairement simple et opératoire de la concurrence pure et parfaite. Nous dirons qu'un marché est concurrentiel lorsque deux conditions sont réunies :

- les agents prennent les prix comme donnés ;
- les prix sont tels que, sur chaque marché, les quantités offertes et demandées sont égales.

Autrement dit, la concurrence pure et parfaite sera ici comprise comme un régime dans lequel les décisions individuelles sont prises à prix donnés, et dans lequel ces prix assurent la compatibilité globale de ces décisions.

Il est important de souligner que cette définition laisse de côté un certain nombre de questions essentielles, notamment celles de l'existence, de l'unicité ou de la stabilité de l'équilibre. Ces questions, bien qu'importantes, excèdent le cadre de cette introduction. Le choix qui est fait ici est de privilégier la compréhension des mécanismes élémentaires de coordination, quitte à en différer l'examen approfondi.

Ainsi comprise, la concurrence pure et parfaite n'apparaît pas comme une description fidèle des économies réelles, mais comme un cadre analytique permettant de penser, de manière cohérente, le rôle des prix dans la coordination des activités économiques.

Ce premier chapitre avait pour objet de rendre explicites les règles du jeu implicites de la microéconomie. Les chapitres suivants introduiront les deux figures centrales de cette analyse — le consommateur et le producteur — avant d'examiner, dans ce cadre, les mécanismes de choix, d'offre, de demande et d'équilibre.

## Chapitre 2

# La théorie du consommateur

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement du consommateur dans le cadre défini au chapitre précédent. Nous y conservons strictement les règles du jeu introduites plus haut : les prix sont supposés donnés, les échanges ont lieu sur des marchés, et les agents adaptent leurs choix à ces prix.

L'analyse proposée ici repose sur une simplification volontaire. Nous ne mobiliserons ni les outils du calcul différentiel ni les méthodes d'optimisation formelle fondées sur les multiplicateurs de Lagrange. De même, certaines difficultés techniques — telles que les solutions en coin — seront laissées de côté. Ces choix ne traduisent pas un manque de généralité, mais une priorité accordée à la compréhension des mécanismes fondamentaux.

L'objectif est en effet de mettre en évidence, de la manière la plus transparente possible, la logique du raisonnement marginaliste. Celui-ci consiste à comparer des variations à la marge : combien un consommateur est-il prêt à céder d'un bien pour obtenir une unité supplémentaire d'un autre ? Comment ce taux d'échange subjectif se compare-t-il au taux d'échange objectif fixé par les prix ?

Pour répondre à ces questions, nous introduirons successivement les biens, les préférences, les courbes d'indifférence, les contraintes budgétaires, puis la notion d'équilibre du consommateur. Nous montrerons également comment les préférences peuvent être représentées par une fonction d'utilité, sans jamais perdre de vue que celle-ci ne constitue qu'un instrument ordinal.

L'ensemble du chapitre peut ainsi être lu comme une exploration systématique d'une idée simple : dans une économie de marchés, le comportement du consommateur résulte de la confrontation entre ses préférences et les prix auxquels il fait face.

### 2.1. Les biens

L'analyse microéconomique du consommateur commence par la définition des objets sur lesquels portent ses choix, à savoir les biens. Cette étape, souvent traitée de manière rapide, mérite pourtant une attention particulière : elle fixe le cadre dans lequel seront formulées les préférences, les contraintes et, plus généralement, l'ensemble du raisonnement.

### 2.1.1. Biens et espace de consommation

On appellera bien toute entité susceptible d'être consommée et procurant, directement ou indirectement, une satisfaction au consommateur. Dans le cadre le plus simple, les biens sont supposés parfaitement divisibles et mesurables par des quantités réelles.

On considère ainsi un nombre fini  $L$  de biens, et l'on représente un panier de consommation par un vecteur :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_L) \in \mathbb{R}_+^L,$$

où  $x_\ell$  désigne la quantité consommée du bien  $\ell$ , et où  $\mathbb{R}_+^L$  désigne l'ensemble des vecteurs à composantes positives ou nulles.

L'ensemble  $\mathbb{R}_+^L$  est appelé *espace de consommation*. Il représente l'ensemble des paniers a priori envisageables.

Dans tout ce chapitre, et sauf mention contraire, nous raisonnerons principalement dans le cas de deux biens ( $L = 2$ ), ce qui permet une représentation graphique simple. Un panier sera alors noté  $(x, y)$ .

### 2.1.2. Interprétation des biens

La notion de bien doit être entendue dans un sens large. Un « bien » peut désigner :

- un bien physique (pain, vêtements, carburant) ;
- un service (transport, logement, éducation) ;
- plus généralement, toute dimension de la consommation pertinente pour l'analyse.

Dans de nombreux cas, les biens sont en réalité des constructions analytiques. Par exemple, on pourra regrouper sous un même « bien » l'ensemble des autres consommations que celles explicitement étudiées, ou encore considérer différentes dates ou différents états du monde comme autant de biens distincts.

Ainsi, un même objet économique peut être représenté de manières différentes selon le niveau d'analyse retenu.

### 2.1.3. Quantités et divisibilité

L'hypothèse de divisibilité joue un rôle important. Elle consiste à supposer que les quantités de biens peuvent varier de manière continue. Autrement dit, il est possible de consommer des fractions arbitrairement petites d'un bien.

Cette hypothèse est évidemment une approximation. De nombreux biens sont indivisibles à une échelle fine (un véhicule, un logement, etc.). Néanmoins, la divisibilité constitue une simplification essentielle, car elle permet de raisonner en termes de variations marginales, au cœur de l'analyse microéconomique.

C'est cette hypothèse qui rend possible la définition du taux marginal de substitution, introduit plus loin.

#### 2.1.4. Non-satiété et disposition à consommer

Dans la plupart des situations que nous considérerons, nous supposerons que « plus est préférable à moins », au moins localement. Cette idée, que l'on précisera formellement dans la section suivante, signifie que le consommateur ne rejette pas a priori des quantités supplémentaires de biens.

Il ne s'agit pas d'affirmer qu'il existe une satisfaction illimitée, mais plutôt que, dans le voisinage des choix pertinents, une augmentation de la consommation d'un bien n'est pas jugée défavorable.

Cette hypothèse joue un rôle important dans la structure des préférences et dans la forme des courbes d'indifférence.

#### 2.1.5. Remarque sur les limites du cadre

Le cadre que nous venons de poser est volontairement simple. Il appelle plusieurs remarques.

- Les biens sont supposés parfaitement définis et homogènes. En pratique, les questions de qualité, de différenciation ou d'incertitude peuvent être importantes.
- L'espace de consommation est supposé donné. Or, dans de nombreuses situations, les choix des agents portent aussi sur l'ensemble des biens disponibles (innovation, production domestique, etc.).
- Enfin, l'analyse est ici statique : elle ne prend pas en compte explicitement le temps, ni l'incertitude. Ces dimensions peuvent être introduites en enrichissant la définition des biens (par exemple en distinguant les biens par date ou par état du monde).

Ces simplifications ne doivent pas être perdues de vue. Elles ne décrivent pas fidèlement la réalité, mais permettent de construire un cadre analytique cohérent dans lequel les raisonnements fondamentaux de la microéconomie peuvent être exposés avec clarté.

Nous pouvons désormais introduire l'élément central de l'analyse du consommateur : ses préférences.

## 2.2. Les préférences

La description du comportement du consommateur repose, en premier lieu, sur la spécification de ses préférences. Celles-ci expriment la manière dont il compare les différents paniers de biens et, en particulier, comment il arbitre entre eux.

### 2.2.1. Relation de préférence

Soit  $X = \mathbb{R}_+^L$  l'espace de consommation. Une *relation de préférence* est une relation binaire notée  $\succeq$  définie sur  $X$ , telle que, pour deux paniers  $x$  et  $y$  :

$$x \succeq y$$

signifie que le consommateur considère le panier  $x$  au moins aussi désirable que le panier  $y$ .

À partir de cette relation, on définit :

- la préférence stricte :  $x \succ y$  si  $x \succeq y$  et non  $y \succeq x$  ;
- l'indifférence :  $x \sim y$  si  $x \succeq y$  et  $y \succeq x$ .

Ainsi, la relation de préférence permet de classer l'ensemble des paniers en termes de désirabilité.

### 2.2.2. Hypothèses fondamentales

Afin de rendre cette relation exploitable analytiquement, on lui impose un certain nombre de propriétés.

**Complétude.** Pour tous  $x, y \in X$ , on a soit  $x \succeq y$ , soit  $y \succeq x$  (ou les deux).

Autrement dit, le consommateur est capable de comparer n'importe quels paniers.

**Transitivité.** Pour tous  $x, y, z \in X$ , si  $x \succeq y$  et  $y \succeq z$ , alors  $x \succeq z$ .

Cette propriété garantit la cohérence interne des choix.

Ces deux hypothèses définissent une relation de préférence rationnelle au sens classique. Elles permettent d'éviter des situations dans lesquelles les choix seraient incohérents ou indéterminés.

### 2.2.3. Monotonie

Nous introduisons maintenant une hypothèse essentielle pour l'analyse économique.

**Monotonie (non-satiété).** Si  $x_\ell \geq y_\ell$  pour tout bien  $\ell$ , et  $x \neq y$ , alors :

$$x \succ y.$$

Autrement dit, un panier contenant au moins autant de chaque bien, et strictement plus d'au moins un bien, est strictement préféré.

Cette hypothèse formalise l'idée intuitive selon laquelle « plus est préférable à moins ». Elle implique notamment que le consommateur n'a pas de raison de se détourner d'une augmentation de la consommation, toutes choses égales par ailleurs.

### 2.2.4. Convexité

Une autre hypothèse importante concerne la manière dont le consommateur apprécie les combinaisons de biens.

**Convexité des préférences.** Si  $x \sim y$ , alors pour tout  $\lambda \in (0, 1)$  :

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \succeq x.$$

Cette propriété signifie que les combinaisons de paniers sont au moins aussi désirables que les paniers eux-mêmes. Elle traduit une préférence pour la diversification.

Dans le cas de deux biens, cette hypothèse se traduira graphiquement par des courbes d'indifférence convexes vers l'origine.

### 2.2.5. Remarque sur la continuité

Dans des développements plus avancés, on introduit généralement une hypothèse de continuité des préférences. Celle-ci permet notamment de garantir l'existence d'une représentation par une fonction d'utilité.

Dans ce chapitre, nous n'explicitons pas formellement cette hypothèse. Nous raisonnerons dans un cadre où les préférences peuvent être représentées de manière régulière, ce qui sera suffisant pour les constructions proposées.

### 2.2.6. Individu ou ménage ?

La représentation retenue jusqu'ici suppose l'existence d'un agent unique, doté d'un ordre de préférences cohérent sur l'ensemble des paniers. Cette hypothèse appelle une remarque importante.

Dans de nombreuses situations, les décisions de consommation sont prises au niveau du ménage, et non de l'individu. Or, un ménage est composé de plusieurs individus, dont les préférences peuvent différer. Rien ne garantit, a priori, que ces préférences puissent être agrégées en un ordre unique satisfaisant les propriétés de complétude et de transitivité.

Des travaux empiriques et théoriques, notamment ceux de Chiappori et de ses co-auteurs [Chiappori, 1988], ont montré les limites de cette représentation unitaire du ménage. Ils proposent des modèles dans lesquels les décisions résultent d'interactions stratégiques ou de mécanismes de partage des ressources.

Malgré ces limites, nous conserverons dans ce chapitre l'hypothèse d'un consommateur représentatif, doté de préférences bien définies. Ce choix ne doit pas être interprété comme une description fidèle des comportements observés, mais comme une simplification permettant de construire un cadre analytique cohérent.

### 2.2.7. Vers les courbes d'indifférence

Les hypothèses introduites dans cette section permettent de donner une représentation géométrique des préférences, particulièrement utile dans le cas de deux biens.

En particulier :

- la complétude et la transitivité permettent de définir des classes d'indifférence ;
- la monotonie garantit que ces classes sont ordonnées ;
- la convexité en détermine la forme.

Ces éléments conduisent naturellement à la notion de courbe d'indifférence, qui sera introduite dans la section suivante, ainsi qu'à celle de taux marginal de substitution, au cœur du raisonnement marginaliste.

## 2.3. Courbes d'indifférence et taux marginal de substitution

Les hypothèses formulées dans la section précédente permettent de donner une représentation géométrique des préférences, particulièrement éclairante dans le cas de deux biens. Cette représentation constitue l'un des outils les plus importants de la microéconomie.

### 2.3.1. Courbes d'indifférence

Dans le cas de deux biens, un panier est noté  $(x, y)$ . Une *courbe d'indifférence* est l'ensemble des paniers entre lesquels le consommateur est indifférent :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid (x, y) \sim (x_0, y_0)\}.$$

Chaque courbe regroupe donc des paniers procurant le même niveau de satisfaction.

Sous les hypothèses de monotonie et de convexité, les courbes d'indifférence présentent deux propriétés essentielles :

- elles sont décroissantes ;
- elles sont convexes vers l'origine.

La figure 2.1 illustre une famille de courbes d'indifférence.

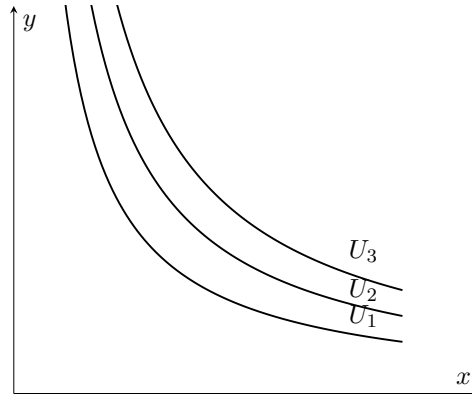


FIGURE 2.1 – Courbes d'indifférence croissantes (plus on s'éloigne de l'origine, plus la satisfaction est élevée)

Chaque courbe correspond à un niveau de satisfaction donné. Les courbes situées plus au nord-est représentent des paniers préférés.

### 2.3.2. Le taux marginal de substitution

Le long d'une courbe d'indifférence, le consommateur accepte de substituer un bien à un autre tout en conservant le même niveau de satisfaction.

Le taux marginal de substitution entre les biens  $x$  et  $y$  mesure la manière dont un consommateur est disposé à substituer le bien  $y$  au bien  $x$  tout en restant indifférent.

Soit un panier initial  $(x_0, y_0)$ . Pour toute variation  $\delta$  du bien  $x$ , on définit le taux de substitution  $ts(\delta)$  comme le nombre tel que :

$$(x_0 + \delta, y_0 - ts(\delta) \delta) \sim (x_0, y_0).$$

Lorsque  $\delta$  est suffisamment petit (et sous des hypothèses de régularité des préférences), ce taux est bien défini.

Le taux marginal de substitution est alors défini comme la limite :

$$TMS_{x,y}(x_0, y_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} ts(\delta).$$

Géométriquement, ce taux correspond (à un signe près) à la pente de la courbe d'indifférence passant par  $(x_0, y_0)$  :

$$TMS_{x,y} = -\frac{dy}{dx}.$$

Dans la suite, on retiendra une interprétation plus intuitive : le taux marginal de substitution mesure la quantité maximale du bien  $y$  que le consommateur est prêt à abandonner pour obtenir une unité supplémentaire du bien  $x$ , tout en restant sur la même courbe d'indifférence.

Géométriquement, le TMS correspond à la pente (en valeur absolue) de la tangente à la courbe d'indifférence.

La figure 2.2 illustre cette notion.

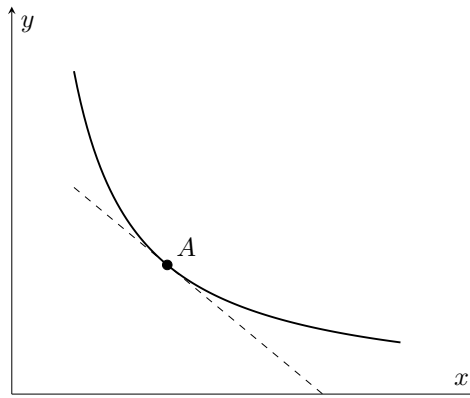


FIGURE 2.2 – Le taux marginal de substitution comme pente de la tangente

### 2.3.3. Interprétations économiques du TMS

Le TMS est une notion centrale, qui doit être comprise sous plusieurs angles complémentaires.

**Disposition marginale à payer.** Le TMS mesure la quantité de  $y$  que le consommateur est prêt à céder pour obtenir une unité supplémentaire de  $x$ . Il s'agit donc d'une disposition marginale à payer pour le bien  $x$ , exprimée en unités du bien  $y$ .

**Compensation marginale requise** Le TMS mesure également ce à quoi le consommateur doit recevoir s'il diminue sa consommation de  $x$  pour que sa situation ne se détériore pas. Le TMS mesure alors la compensation marginale requise de  $x$  en termes de  $y$ .

Ces deux interprétations sont strictement équivalentes, mais il est essentiel de savoir passer de l'une à l'autre.

### 2.3.4. Exemples numériques

**Exemple 1.** Au voisinage d'un panier donné, un consommateur est prêt à abandonner 2 unités de  $y$  pour obtenir 1 unité de  $x$ . Alors :

$$TMS = 2.$$

**Exercice 1.** Un consommateur est indifférent entre  $(2, 10)$  et  $(3, 7)$ .

— Donner une approximation du TMS.

**Solution.**

$$\Delta x = 1, \quad \Delta y = -3 \Rightarrow TMS \approx 3.$$

### 2.3.5. Décroissance du TMS

L'hypothèse de convexité des préférences implique que le TMS est décroissant.

Autrement dit, plus le consommateur dispose du bien  $x$ , moins il est prêt à abandonner de  $y$  pour en obtenir davantage.

Cette propriété est fondamentale. Elle traduit une forme de « saturation relative » : un bien devient moins précieux à mesure qu'il est abondant.

Cette intuition permet d'éclairer le **paradoxe de l'eau et du diamant**, un paradoxe classique formulé par Adam Smith au XVIII<sup>e</sup> siècle. Alors que l'eau est indispensable à la vie, elle est généralement peu coûteuse, tandis que le diamant, bien moins utile, possède une valeur élevée. La résolution de ce paradoxe réside précisément dans le caractère marginal de l'évaluation : l'eau, abondante, a une utilité marginale faible, tandis que le diamant, rare, a une utilité marginale élevée.

Dans le cadre de la théorie du consommateur, cette idée se traduit par la décroissance du taux marginal de substitution : la valeur relative d'un bien dépend de la quantité déjà consommée.

**Exercice 2.** Comparer les situations suivantes :

- un consommateur possède peu de  $x$  ;
- un consommateur possède beaucoup de  $x$ .

Dans quel cas le TMS est-il le plus élevé ?

**Réponse.** Le TMS est plus élevé lorsque le bien  $x$  est rare.

### 2.3.6. Conclusion

Les courbes d'indifférence et le taux marginal de substitution fournissent une représentation complète et opérationnelle des préférences.

Toute la suite de l'analyse reposera sur une idée simple : comparer ce taux d'échange subjectif au taux d'échange objectif imposé par les prix.

C'est de cette comparaison que naît le raisonnement marginaliste.

## 2.4. La contrainte budgétaire

Les préférences décrivent ce que le consommateur souhaite. Encore faut-il tenir compte de ce qu'il peut effectivement réaliser. La contrainte budgétaire exprime cette limitation.

Elle doit d'abord être comprise comme une contrainte comptable : la valeur des emplois ne peut pas dépasser la valeur des ressources. Le consommateur dispose d'une richesse monétaire, ou d'un revenu, qu'il peut affecter à l'achat des différents biens. Ses choix doivent donc respecter l'égalité ou l'inégalité entre ce qu'il dépense et ce dont il dispose.

### 2.4.1. Définition

Soient  $p_x > 0$  et  $p_y > 0$  les prix des biens  $x$  et  $y$ , et soit  $W > 0$  la richesse du consommateur.

Dans ce cadre simple,  $W$  représente la valeur des ressources disponibles. Si le consommateur choisit le panier  $(x, y)$ , la valeur de ses emplois, c'est-à-dire la dépense totale associée à ce panier, est :

$$p_x x + p_y y.$$

Le panier  $(x, y)$  est accessible si cette dépense ne dépasse pas la richesse disponible :

$$p_x x + p_y y \leq W.$$

L'ensemble des paniers accessibles est donc :

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_x x + p_y y \leq W\}.$$

La frontière de cet ensemble est définie par l'égalité :

$$p_x x + p_y y = R.$$

Elle est appelée *droite budgétaire*.

### 2.4.2. Représentation graphique

La droite budgétaire peut être réécrite sous la forme :

$$y = \frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x.$$

Elle est donc une droite décroissante, caractérisée par :

- une ordonnée à l'origine égale à  $\frac{R}{p_y}$  ;
- une abscisse à l'origine égale à  $\frac{R}{p_x}$  ;
- une pente égale à  $-\frac{p_x}{p_y}$ .

La figure 2.3 illustre cette contrainte.

Tous les paniers situés sous la droite sont accessibles. Les points situés au-dessus ne le sont pas.

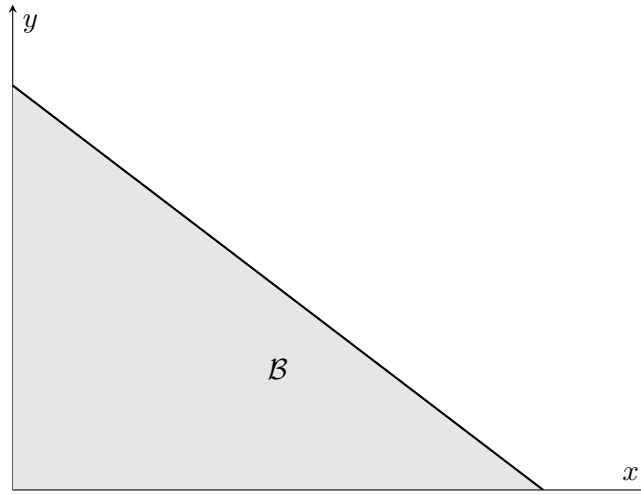


FIGURE 2.3 – Ensemble budgétaire et droite budgétaire

### 2.4.3. Interprétation de la pente

La pente de la droite budgétaire est donnée par :

$$-\frac{p_x}{p_y}.$$

Cette expression possède une interprétation économique fondamentale.

**Interprétation.** Le rapport  $\frac{p_x}{p_y}$  mesure le taux auquel le marché permet d'échanger le bien  $x$  contre le bien  $y$ .

Plus précisément, pour obtenir une unité supplémentaire de  $x$ , le consommateur doit renoncer à  $\frac{p_x}{p_y}$  unités de  $y$ .

Autrement dit, le rapport des prix représente le *coût d'opportunité de  $x$*  en termes de  $y$  sur le marché.

**Exemple numérique.** Si  $p_x = 4$  et  $p_y = 2$ , alors :

$$\frac{p_x}{p_y} = 2.$$

Le marché impose un échange de 1 unité de  $x$  contre 2 unités de  $y$ .

### 2.4.4. Variations de la contrainte budgétaire

La droite budgétaire dépend du revenu et des prix. Une variation de ces paramètres modifie sa position ou sa pente.

**Variation du revenu.** Si  $R$  augmente (les prix restant constants), la droite budgétaire se déplace parallèlement vers l'extérieur.

**Variation d'un prix.** Si  $p_x$  augmente, la droite devient plus pentue : le bien  $x$  devient relativement plus coûteux.

La figure 2.4 illustre une variation du prix de  $x$ .

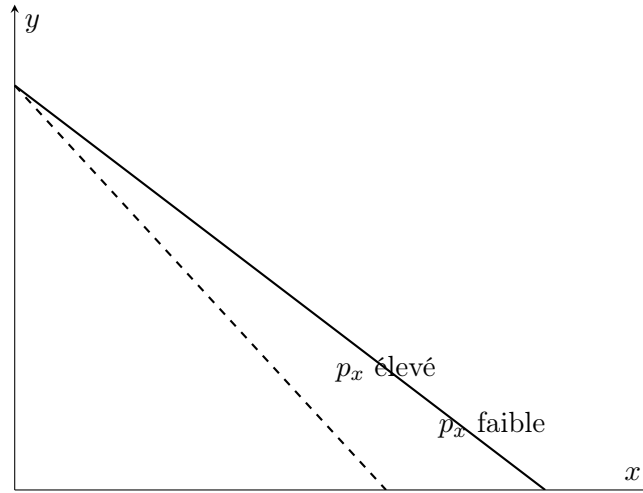


FIGURE 2.4 – Effet d'une hausse du prix du bien  $x$

#### 2.4.5. Remarque essentielle

La contrainte budgétaire introduit dans l'analyse un élément fondamental : les prix. Ceux-ci ne sont pas choisis par le consommateur ; ils lui sont donnés.

Le consommateur ne choisit donc pas librement les combinaisons de biens. Il choisit parmi celles qui sont compatibles avec les prix du marché et avec son revenu.

Ainsi, la contrainte budgétaire exprime la manière dont le système de prix limite et structure les choix individuels.

#### 2.4.6. Conclusion

Deux éléments sont désormais en place :

- les préférences, représentées par les courbes d'indifférence ;
- les contraintes, représentées par la droite budgétaire.

La section suivante consistera à confronter ces deux éléments.

C'est de cette confrontation que naît le problème du consommateur : choisir, parmi les paniers accessibles, celui qui est le plus désirable.

### 2.5. Disposition marginale à payer, coût d'opportunité et équilibre du consommateur

Nous disposons désormais des deux éléments fondamentaux de l'analyse :

- les préférences, représentées par les courbes d'indifférence ;
- la contrainte budgétaire, déterminée par les prix et le revenu.

Le problème du consommateur consiste à choisir, parmi les paniers accessibles, celui qui est le plus désirable.

### 2.5.1. Représentation de l'équilibre

Graphiquement, le choix optimal correspond au point où la courbe d'indifférence la plus élevée accessible est tangente à la droite budgétaire.

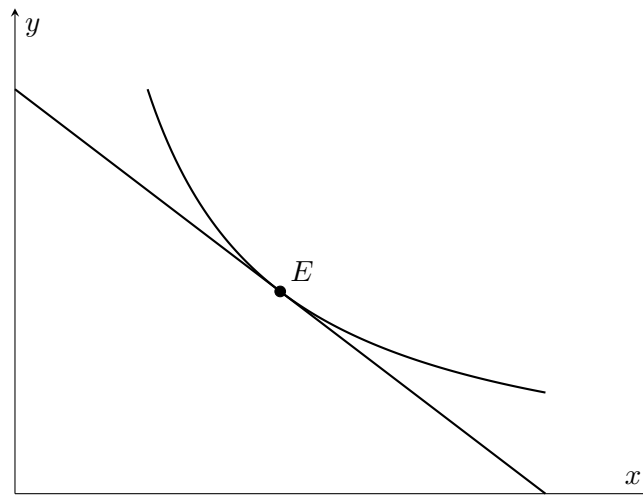


FIGURE 2.5 – Équilibre du consommateur

Comme illustré sur la figure 2.5, le point  $E$  possède une propriété remarquable : il n'existe aucun panier accessible qui soit strictement préféré.

### 2.5.2. Trois lectures de l'optimum

Le point d'équilibre peut être interprété de trois manières complémentaires.

**Lecture géométrique.** La courbe d'indifférence est tangente à la droite budgétaire.

**Lecture en termes de taux d'échange.** Au point optimal :

$$TMS = \frac{p_x}{p_y}.$$

Le taux d'échange subjectif (propre au consommateur) est égal au taux d'échange objectif (imposé par le marché).

**Lecture marginaliste.** Il n'existe plus de réarrangement marginal du panier permettant d'obtenir un surplus.

### 2.5.3. Logique des réarrangements marginaux

Supposons que le consommateur ne soit pas à l'équilibre. Nous allons montrer qu'il est alors possible de réorganiser marginalement son panier de manière à dégager un surplus.

Considérons une variation  $(dx, dy)$  telle que le consommateur reste sur la même courbe d'indifférence. Par définition du TMS :

$$dy = -TMS \cdot dx.$$

Pour financer cette variation sur le marché, il faut respecter la contrainte budgétaire :

$$p_x dx + p_y dy \leq 0.$$

En substituant :

$$p_x dx - p_y TMS \cdot dx = (p_x - p_y TMS) dx.$$

Deux cas apparaissent :

- si  $TMS > \frac{p_x}{p_y}$ , alors il est possible d'augmenter  $x$  tout en dégagant un surplus ;
- si  $TMS < \frac{p_x}{p_y}$ , alors il est possible d'augmenter  $y$  tout en dégagant un surplus.

Ainsi, tant que :

$$TMS \neq \frac{p_x}{p_y},$$

il existe un réarrangement améliorant.

#### 2.5.4. Tableau des réarrangements marginaux

On peut représenter ce raisonnement sous forme d'un tableau.

Cas  $TMS > \frac{p_x}{p_y}$  :

	Variation de $x$	Variation de $y$	Interprétation
Choix marginal	$+dx$	$-TMS \cdot dx$	Maintien de l'utilité
Échange de marché	$+dx$	$-\frac{p_x}{p_y} dx$	Respect du budget
Surplus	0	$\left(TMS - \frac{p_x}{p_y}\right) dx$	Gain en $y$

Le consommateur peut donc conserver le même niveau de satisfaction tout en dégagant une quantité supplémentaire du bien  $y$ .

#### 2.5.5. Exemple numérique

Supposons :

$$TMS = 3, \quad \frac{p_x}{p_y} = 2.$$

	Variation de $x$	Variation de $y$
Choix marginal	+1	-3
Échange de marché	+1	-2
Surplus	0	+1

Le consommateur peut donc augmenter  $x$  d'une unité, rester sur la même courbe d'indifférence, et dégager une unité supplémentaire de  $y$ .

### 2.5.6. Extension à trois biens

Considérons maintenant trois biens  $(x_1, x_2, x_3)$ , mais supposons que seul l'arbitrage entre  $x_1$  et  $x_2$  soit en jeu.

Supposons :

$$TMS_{1,2} = 4, \quad \frac{p_1}{p_2} = 2.$$

On peut effectuer le réarrangement suivant :

- augmenter  $x_1$  de 1 ;
  - diminuer  $x_2$  de 4 pour rester sur la même indifférence ;
  - le marché n'exige qu'une réduction de 2 ;
- ce qui libère 2 unités du bien  $x_2$ .

Le bien  $x_3$  reste inchangé, mais le consommateur dispose désormais d'un surplus qu'il peut allouer librement.

### 2.5.7. Conclusion

Le raisonnement marginaliste conduit à une conclusion simple :

*À l'équilibre, il n'existe aucun réarrangement marginal permettant de dégager un surplus.*

Cette condition est équivalente à l'égalité :

$$TMS = \frac{p_x}{p_y}.$$

Ainsi, l'égalité des taux n'est pas un point de départ, mais le résultat d'un processus d'ajustement conceptuel fondé sur l'élimination de toutes les possibilités d'amélioration.

## 2.6. Préférences et fonctions d'utilité

Les préférences constituent l'objet primitif de l'analyse : elles décrivent la manière dont le consommateur classe les paniers de biens. Il est toutefois souvent commode de les représenter à l'aide d'une fonction numérique, appelée fonction d'utilité.

Cette section a pour objet de préciser le statut de cette représentation, et d'en proposer une construction simple.

### 2.6.1. Fonction d'utilité : définition

Une fonction d'utilité est une application :

$$u : X \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que, pour tous  $x, y \in X$  :

$$x \succeq y \iff u(x) \geq u(y).$$

Autrement dit, la fonction  $u$  représente fidèlement l'ordre de préférence : elle associe un nombre plus élevé aux paniers préférés.

### 2.6.2. Interprétation : un altimètre ordinal

Il est essentiel de comprendre que la fonction d'utilité ne mesure pas une satisfaction au sens cardinal.

Elle joue le rôle d'un *altimètre* :

- elle permet de dire si un panier est « plus haut » ou « plus bas » qu'un autre ;
- mais la différence entre deux niveaux n'a pas de signification intrinsèque.

Ainsi, seules les comparaisons ordinales sont pertinentes.

### 2.6.3. Transformations croissantes

Si  $u$  représente les préférences, toute transformation strictement croissante de  $u$  les représente également.

**Exemple.** Si  $u(x, y) = xy$ , alors :

$$v(x, y) = \ln(xy)$$

représente exactement les mêmes préférences.

Cette propriété confirme que l'utilité n'est définie qu'à une transformation croissante près.

### 2.6.4. Une construction simple de l'utilité

Nous proposons maintenant une construction concrète d'une fonction d'utilité, inspirée des travaux de Wold et d'Allais.

Supposons que l'espace de consommation soit borné, et qu'il existe :

- un panier  $x^{min}$ , considéré comme le pire panier ;
- un panier  $x^{max}$ , considéré comme le meilleur panier.

Considérons alors, pour  $\lambda \in [0, 1]$ , les paniers de la forme :

$$z(\lambda) = \lambda x^{max} + (1 - \lambda)x^{min}.$$

Ces paniers forment un segment reliant le pire au meilleur.

Pour tout panier  $x$ , on peut alors définir un nombre  $\lambda(x)$  tel que :

$$x \sim z(\lambda(x)).$$

Autrement dit, on associe à chaque panier le point du segment auquel il est indifférent.

On définit alors :

$$u(x) = \lambda(x).$$

Cette fonction vérifie :

- si  $x$  est préféré à  $y$ , alors  $u(x) \geq u(y)$  ;
- $u(x^{min}) = 0$ ,  $u(x^{max}) = 1$ .

On obtient ainsi une représentation des préférences sans introduire de structure supplémentaire.

### 2.6.5. Interprétation de la construction

Cette construction peut être interprétée de la manière suivante :

- on réduit l'ensemble des paniers à une échelle unidimensionnelle ;
- chaque panier est repéré par sa « position » entre le pire et le meilleur ;
- cette position reflète uniquement un ordre, et non une intensité.

Ainsi, la fonction d'utilité n'est qu'un outil de codage des préférences.

### 2.6.6. Lien avec les courbes d'indifférence

Les courbes d'indifférence correspondent aux ensembles de paniers ayant la même valeur d'utilité :

$$\{x \in X \mid u(x) = c\}.$$

La fonction d'utilité permet donc de « numéroter » les courbes d'indifférence, sans en modifier la structure.

### 2.6.7. Remarque sur les limites

La construction proposée repose sur des hypothèses simplificatrices :

- existence d'un pire et d'un meilleur panier ;
- possibilité de représenter les préférences le long d'un segment.

Dans des cadres plus généraux, l'existence d'une fonction d'utilité requiert des hypothèses plus techniques, notamment de continuité.

Ces raffinements ne sont pas nécessaires ici. L'objectif est simplement de comprendre le rôle et le statut de l'utilité dans l'analyse microéconomique.

### Exercice : une construction d'utilité à la Wold

On considère un espace de consommation borné, réduit ici à l'ensemble des paniers de deux biens représentés dans un carré. On suppose qu'il existe :

- un panier  $x^{min}$ , considéré comme le moins désirable ;
- un panier  $x^{max}$ , considéré comme le plus désirable.

On suppose également que, pour tout panier  $x$ , il existe un unique nombre  $\lambda(x) \in [0, 1]$  tel que :

$$x \sim \lambda(x)x^{max} + (1 - \lambda(x))x^{min}.$$

On définit alors :

$$u(x) = \lambda(x).$$

## Questions

1. Que valent  $u(x^{min})$  et  $u(x^{max})$  ?
2. Soient deux paniers  $x$  et  $y$  tels que

$$x \sim \frac{1}{4}x^{max} + \frac{3}{4}x^{min}, \quad y \sim \frac{3}{4}x^{max} + \frac{1}{4}x^{min}.$$

Calculer  $u(x)$  et  $u(y)$ .

3. Lequel des deux paniers est préféré ?
4. Soit un troisième panier  $z$  tel que

$$z \sim \frac{1}{2}x^{max} + \frac{1}{2}x^{min}.$$

Comparer  $z$  à  $x$  et à  $y$ .

5. Expliquer pourquoi cette construction fournit une représentation ordinale des préférences.

## Solution

1. On a immédiatement :

$$u(x^{min}) = 0, \quad u(x^{max}) = 1.$$

2. Par définition :

$$u(x) = \frac{1}{4}, \quad u(y) = \frac{3}{4}.$$

3. Comme

$$u(y) > u(x),$$

on en déduit que  $y \succ x$ .

4. On a :

$$u(z) = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$u(x) < u(z) < u(y),$$

ce qui implique :

$$y \succ z \succ x.$$

5. Cette construction associe à chaque panier un nombre compris entre 0 et 1, qui repère sa position sur l'échelle reliant le pire panier au meilleur. Ce nombre ne mesure pas une intensité de satisfaction ; il permet seulement de classer les paniers. La fonction ainsi obtenue représente donc les préférences de manière ordinale.

**Remarque.** Dans cet exercice, les nombres  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{3}{4}$  ne mesurent pas des écarts de satisfaction. Ils indiquent seulement des positions sur une échelle de classement. Dire que  $u(y) - u(z) = u(z) - u(x)$  n'autorise aucune conclusion sur des « gains d'utilité » identiques.

### 2.6.8. Conclusion

La fonction d'utilité ne constitue pas une donnée fondamentale du modèle. Elle est construite à partir des préférences, qu'elle représente de manière ordinale.

L'analyse du consommateur pourrait être menée entièrement à partir des courbes d'indifférence et du taux marginal de substitution. L'introduction d'une fonction d'utilité constitue un outil supplémentaire, utile pour certaines manipulations, mais dont la signification doit être clairement comprise.

La section suivante exploitera cette représentation pour introduire les notions d'utilité marginale et de demande.

## 2.7. Utilités marginales, dispositions marginales et demandes

La représentation des préférences par une fonction d'utilité permet d'introduire un langage complémentaire, fondé sur les variations marginales de l'utilité. Ce langage ne remplace pas l'analyse en termes de courbes d'indifférence et de taux marginal de substitution ; il en constitue une reformulation commode.

### 2.7.1. Utilités marginales

Soit une fonction d'utilité  $u(x, y)$  représentant les préférences.

L'*utilité marginale* du bien  $x$  mesure la variation de l'utilité consécutive à une augmentation marginale de  $x$ , toutes choses égales par ailleurs. On la note :

$$u_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y).$$

De même :

$$u_y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

**Interprétation.** L'utilité marginale indique dans quelle mesure une petite augmentation de la consommation d'un bien modifie le classement du panier.

Il est important de souligner que, comme l'utilité elle-même, les utilités marginales n'ont pas de signification absolue. Leur intérêt réside essentiellement dans leur rapport.

### 2.7.2. Lien avec le taux marginal de substitution

Le taux marginal de substitution peut être exprimé à l'aide des utilités marginales :

$$TMS_{x,y} = \frac{u_x}{u_y}.$$

Cette relation a une interprétation immédiate.

- $u_x$  mesure le « gain » associé à une augmentation marginale de  $x$  ;
- $u_y$  mesure le « gain » associé à une augmentation marginale de  $y$  ;
- leur rapport indique combien d'unités de  $y$  compensent une unité de  $x$ .

On retrouve ainsi l'idée déjà introduite : le TMS est un taux d'échange subjectif.

### 2.7.3. Exemple

Considérons la fonction d'utilité :

$$u(x, y) = xy.$$

On a :

$$u_x = y, \quad u_y = x.$$

Donc :

$$TMS = \frac{y}{x}.$$

**Interprétation.** Plus le consommateur dispose de  $y$ , plus il valorise  $x$  ; inversement, plus il dispose de  $x$ , moins il est prêt à sacrifier de  $y$ .

### 2.7.4. Condition d'équilibre

On a vu que l'équilibre du consommateur est caractérisé par :

$$TMS = \frac{p_x}{p_y}.$$

En utilisant les utilités marginales, cette condition s'écrit :

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{p_x}{p_y}.$$

Elle peut être réarrangée sous la forme :

$$\frac{u_x}{p_x} = \frac{u_y}{p_y}.$$

**Interprétation fondamentale.** À l'équilibre, l'utilité marginale par unité monétaire dépensée est la même pour tous les biens.

Autrement dit, un euro dépensé dans un bien rapporte autant (en termes d'utilité) qu'un euro dépensé dans un autre bien.

### 2.7.5. Exemple numérique

Supposons :

$$u_x = 6, \quad u_y = 3, \quad p_x = 3, \quad p_y = 1.$$

Alors :

$$\frac{u_x}{p_x} = \frac{6}{3} = 2, \quad \frac{u_y}{p_y} = \frac{3}{1} = 3.$$

Le consommateur obtient davantage d'utilité par euro dépensé en  $y$  qu'en  $x$ . Il a donc intérêt à augmenter sa consommation de  $y$  et à réduire celle de  $x$ .

### 2.7.6. Fonctions de demande

Le comportement du consommateur peut être résumé par ses *fonctions de demande*.  
Celles-ci associent à chaque système de prix et de revenu les quantités choisies :

$$x = x(p_x, p_y, R), \quad y = y(p_x, p_y, R).$$

Ces fonctions traduisent la manière dont le consommateur ajuste ses choix en fonction des prix et du revenu.

### 2.7.7. Exemple simple

Considérons à nouveau :

$$u(x, y) = xy.$$

À l'équilibre :

$$\frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{p_x}{p_y} x.$$

En combinant avec la contrainte budgétaire :

$$p_x x + p_y y = R,$$

on obtient :

$$p_x x + p_y \frac{p_x}{p_y} x = 2p_x x = R,$$

d'où :

$$x = \frac{R}{2p_x}, \quad y = \frac{R}{2p_y}.$$

Chaque bien absorbe la moitié du revenu.

### 2.7.8. Remarque sur la méthode

Dans cet exemple, nous avons obtenu les fonctions de demande sans recourir aux méthodes d'optimisation formelle. Le raisonnement repose uniquement sur :

- la condition d'égalisation des taux ;
- la contrainte budgétaire.

Cette approche est cohérente avec l'esprit de ce chapitre : privilégier la compréhension des mécanismes plutôt que la technicité des méthodes.

### 2.7.9. Conclusion

L'introduction des utilités marginales permet de reformuler le raisonnement du consommateur en termes de gains marginaux.

Elle conduit à une règle simple : répartir les dépenses de manière à égaliser l'utilité marginale par unité monétaire.

Cette règle fournit un pont naturel entre les préférences et les fonctions de demande, et prépare l'analyse des réactions du consommateur aux variations de prix et de revenu.

### 2.7.10. Dotations initiales

Jusqu'à présent, le revenu du consommateur était donné de manière exogène. On peut adopter une perspective différente en supposant que le consommateur dispose initialement d'un panier de biens, appelé *dotation initiale*.

Soit :

$$\omega = (\omega_x, \omega_y)$$

cette dotation. Le revenu du consommateur n'est plus donné indépendamment des prix : il est égal à la valeur de sa dotation aux prix du marché :

$$R = p_x \omega_x + p_y \omega_y.$$

La contrainte budgétaire devient alors :

$$p_x x + p_y y = p_x \omega_x + p_y \omega_y.$$

Cette équation possède une propriété importante : la droite budgétaire passe toujours par le point de dotation  $\omega$ . En effet, si le consommateur choisit de conserver exactement sa dotation, c'est-à-dire si  $(x, y) = (\omega_x, \omega_y)$ , alors les deux membres de l'équation sont égaux.

Lorsque les prix relatifs changent, la pente de la droite budgétaire se modifie. La droite pivote alors autour du point de dotation. En revanche, si tous les prix sont multipliés par un même facteur positif, la contrainte budgétaire ne change pas :

$$\lambda p_x x + \lambda p_y y = \lambda p_x \omega_x + \lambda p_y \omega_y.$$

En divisant par  $\lambda > 0$ , on retrouve :

$$p_x x + p_y y = p_x \omega_x + p_y \omega_y.$$

Ainsi, seule la structure des prix relatifs importe. Une augmentation proportionnelle de tous les prix laisse inchangé l'ensemble budgétaire.

**Interprétation.** Le consommateur peut conserver sa dotation, ou bien la vendre aux prix du marché pour acheter un autre panier. Le marché transforme donc la dotation initiale en pouvoir d'achat.

La figure 2.6 illustre cette logique. Le point  $\omega$  représente la dotation initiale. La droite budgétaire passe par ce point. Le consommateur peut conserver sa dotation, mais il peut également procéder à des échanges pour atteindre un panier préféré, ici le point  $E$ , où la courbe d'indifférence est tangente à la contrainte budgétaire.

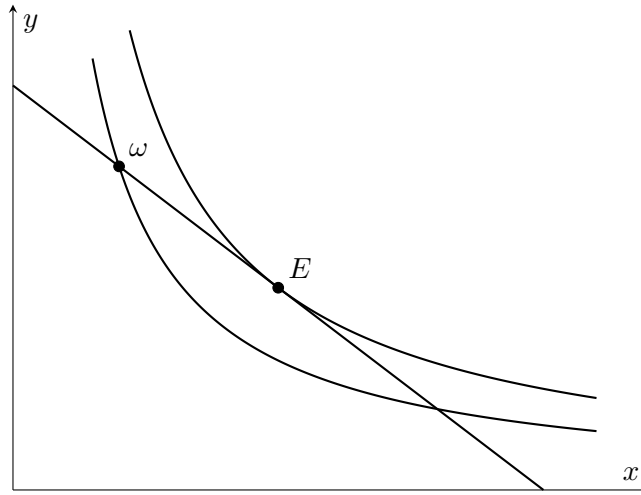


FIGURE 2.6 – Dotation initiale, échange et choix optimal

Si la dotation est différente du panier optimal, le consommateur procède à des échanges. Ce cadre sera central dans l'analyse de l'équilibre général.

**Exercice.** Un consommateur dispose de la dotation  $\omega = (2, 4)$ . Les prix sont  $p_x = 1, p_y = 1$ .

- Quel est son revenu ?
- Donner l'équation de sa contrainte budgétaire.
- Que devient cette contrainte si les deux prix doublent ?

### 2.7.11. Offre de travail

On peut interpréter l'un des « biens » comme du loisir. Le consommateur arbitre alors entre loisir et consommation.

Soit :

- $c$  : consommation ;
- $\ell$  : loisir ;
- $T$  : temps total disponible ;
- $w$  : salaire.

Le temps de travail est  $T - \ell$ , et le revenu est :

$$R = w(T - \ell).$$

La contrainte budgétaire devient :

$$c = w(T - \ell).$$

**Interprétation.** Le salaire  $w$  est le prix du loisir : une unité supplémentaire de loisir coûte  $w$  unités de consommation.

L'arbitrage du consommateur détermine son offre de travail.

**Exercice.** Un individu dispose de  $T = 10$  unités de temps et fait face à un salaire  $w = 2$ .

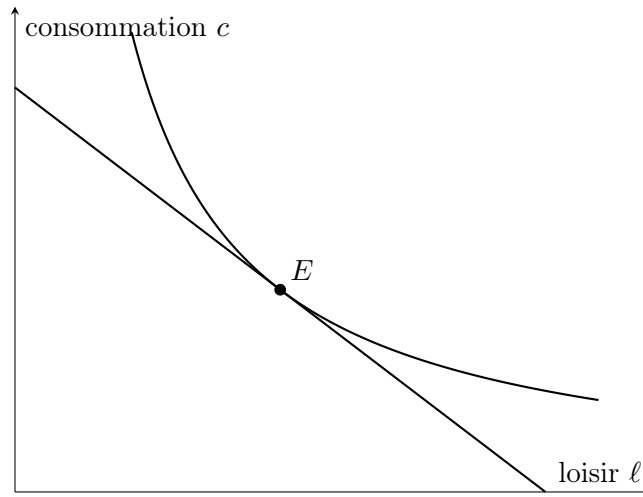


FIGURE 2.7 – Arbitrage entre loisir et consommation

- Écrire sa contrainte budgétaire.
- Quelle est la consommation maximale s'il ne prend aucun loisir ?

### 2.7.12. Imposition

On peut enfin introduire une fiscalité simple, par exemple une taxe sur le bien  $x$ .

Si une taxe  $\tau$  est appliquée, le prix payé par le consommateur devient :

$$p'_x = p_x + \tau.$$

La contrainte budgétaire devient :

$$p'_x x + p_y y = R.$$

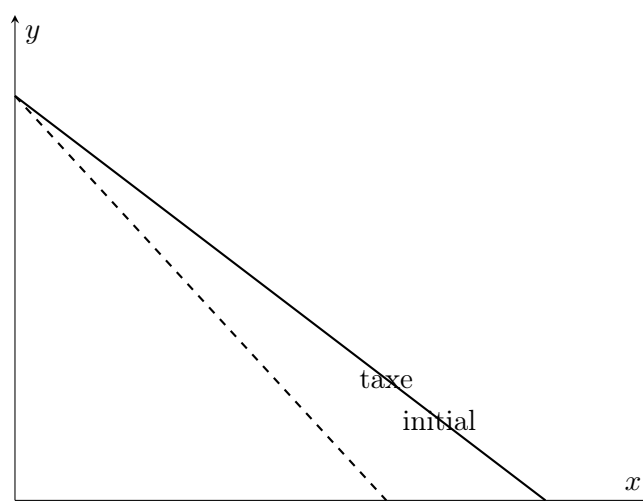


FIGURE 2.8 – Effet d'une taxe sur le bien  $x$

**Interprétation.** La taxe modifie les prix relatifs, et donc le coût d'opportunité des biens. Le consommateur ajuste son panier en conséquence.

**Exercice.** On suppose  $p_x = 2$ ,  $p_y = 1$ ,  $R = 10$ . Une taxe  $\tau = 1$  est introduite sur le bien  $x$ .

- Quel est le nouveau prix de  $x$  ?
- Donner la nouvelle contrainte budgétaire.

### 2.7.13. Conclusion

Ces exemples illustrent la portée du cadre d'analyse développé dans ce chapitre. À partir d'un nombre limité d'outils, il est possible d'étudier des situations variées :

- échange à partir d'une dotation initiale ;
- arbitrage entre travail et loisir ;
- effets de la fiscalité.

Dans chacun de ces cas, le raisonnement repose sur les mêmes éléments :

- des préférences ;
- des contraintes exprimées en termes de prix ;
- un ajustement fondé sur des arbitrages marginaux.

Cette unité de méthode constitue l'une des forces de l'analyse microéconomique.

#### À retenir

- Le consommateur choisit son panier en confrontant ses préférences aux prix du marché.
- Les préférences sont représentées par des courbes d'indifférence ; leur pente définit le taux marginal de substitution (TMS).
- Les prix définissent un taux d'échange objectif, égal au rapport des prix.
- À l'équilibre :

$$TMS = \frac{p_x}{p_y}$$

il n'existe plus de réarrangement marginal permettant de dégager un surplus.

- La fonction d'utilité est une représentation ordinale des préférences.
- L'égalité

$$\frac{u_x}{p_x} = \frac{u_y}{p_y}$$

signifie que l'utilité marginale par euro dépensé est égalisée entre les biens.

- Ce cadre s'applique à des situations variées : échange, travail, fiscalité.

## Exercices corrigés

### Dotations initiales

#### Solution.

- Le revenu est :

$$R = p_x \omega_x + p_y \omega_y = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 6.$$

- La contrainte budgétaire est :

$$x + y = 6.$$

### Offre de travail

#### Solution.

— La contrainte budgétaire est :

$$c = 2(10 - \ell).$$

— Si  $\ell = 0$ , alors :

$$c = 2 \times 10 = 20.$$

### Imposition

#### Solution.

— Le nouveau prix est :

$$p'_x = p_x + \tau = 2 + 1 = 3.$$

— La contrainte budgétaire devient :

$$3x + y = 10.$$

# Chapitre 3

## La théorie du producteur

### 3.1. La production et la technologie

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement du producteur dans le cadre défini précédemment. Comme pour le consommateur, nous adoptons une représentation simplifiée mais cohérente : les prix sont donnés, les marchés sont concurrentiels, et les agents prennent leurs décisions en fonction de ces prix.

La symétrie avec la théorie du consommateur doit être soulignée dès l'abord. Là où le consommateur est caractérisé par ses préférences, le producteur l'est par sa technologie. Là où le consommateur choisit un panier de biens, le producteur choisit une combinaison de facteurs de production.

#### 3.1.1. Biens et facteurs de production

On distingue deux types de biens :

- les *inputs* (ou facteurs de production), utilisés pour produire ;
- l'*output*, c'est-à-dire le bien produit.

Dans ce chapitre, nous considérons une technologie de production à un seul output, noté  $y$ , et plusieurs facteurs de production, notés  $x_1, x_2, \dots, x_L$ .

Un plan de production est donc un vecteur :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_L) \in \mathbb{R}_+^L,$$

qui permet de produire une quantité  $y$  du bien final.

Les facteurs de production peuvent être interprétés de différentes manières :

- travail ;
- capital ;
- matières premières ;
- énergie, etc.

Comme dans le cas du consommateur, nous supposons que ces quantités sont divisibles, ce qui permet de raisonner en termes marginaux.

### 3.1.2. La fonction de production

La technologie est représentée par une fonction de production :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_L).$$

Cette fonction associe à chaque combinaison de facteurs la quantité maximale de bien qui peut être produite.

**Interprétation.** La fonction  $f$  ne décrit pas ce qui est effectivement produit, mais ce qui est **au plus** techniquement réalisable.

### 3.1.3. Hypothèses de base

Nous introduisons deux hypothèses simples, analogues à celles retenues pour les préférences du consommateur.

**Monotonie.** Si l'on augmente la quantité d'un facteur, sans diminuer les autres, la production ne diminue pas :

$$x' \geq x \Rightarrow f(x') \geq f(x).$$

Cette hypothèse signifie que les facteurs sont productifs.

**Divisibilité.** Les facteurs peuvent être ajustés de manière continue.

Cette hypothèse permet de définir des variations marginales de production.

### 3.1.4. Représentation à deux facteurs

Pour des raisons graphiques, nous nous placerons souvent dans le cas de deux facteurs, notés  $x_1$  et  $x_2$ .

La fonction de production s'écrit alors :

$$y = f(x_1, x_2).$$

Chaque niveau de production  $y$  peut être associé à l'ensemble des combinaisons de facteurs permettant de l'atteindre.

Ces ensembles seront étudiés dans la section suivante, sous la forme de courbes appelées *isoquantes*.

### 3.1.5. Remarque sur les limites du cadre

Le cadre retenu ici est volontairement simple.

- La production est supposée porter sur un seul bien. Les situations de production jointe seront étudiées en extension.
- La technologie est supposée connue et stable. En pratique, elle peut évoluer (innovation, apprentissage).

— L'analyse est statique : elle ne prend pas en compte le temps ni l'incertitude.

Ces simplifications permettent de faire apparaître clairement les mécanismes fondamentaux du comportement du producteur.

### 3.1.6. Conclusion

La fonction de production joue, pour le producteur, un rôle analogue à celui des préférences pour le consommateur.

Elle définit les possibilités techniques à partir desquelles le producteur va effectuer ses choix.

La section suivante introduira une représentation géométrique de ces possibilités, ainsi qu'une notion centrale pour le raisonnement marginaliste : le taux marginal de substitution technique.

## 3.2. Isoquantes et taux marginal de substitution technique

La fonction de production peut être représentée géométriquement, de manière analogue aux courbes d'indifférence dans la théorie du consommateur.

### 3.2.1. Isoquantes

Dans le cas de deux facteurs  $(x_1, x_2)$ , une *isoquante* est l'ensemble des combinaisons de facteurs permettant de produire un niveau donné  $y$  :

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid f(x_1, x_2) = y\}.$$

Chaque isoquante correspond donc à un niveau de production constant.

Sous des hypothèses naturelles (productivité des facteurs, substituabilité), les isoquantes présentent deux propriétés essentielles :

- elles sont décroissantes ;
- elles sont convexes vers l'origine.

La figure 3.1 illustre une famille d'isoquantes.

Les isoquantes situées plus au nord-est correspondent à des niveaux de production plus élevés.

### 3.2.2. Taux marginal de substitution technique

Le taux marginal de substitution technique (TMST) mesure la manière dont l'entreprise peut substituer un facteur à un autre tout en maintenant un niveau de production constant.

Soit un niveau de production donné  $\bar{q}$ , et une combinaison de facteurs  $(K_0, L_0)$  telle que :

$$f(K_0, L_0) = \bar{q}.$$

Considérons une variation  $\delta$  du facteur capital. On cherche alors à ajuster le travail de manière à maintenir la production constante. On définit le taux de substitution  $ts(\delta)$  comme le nombre

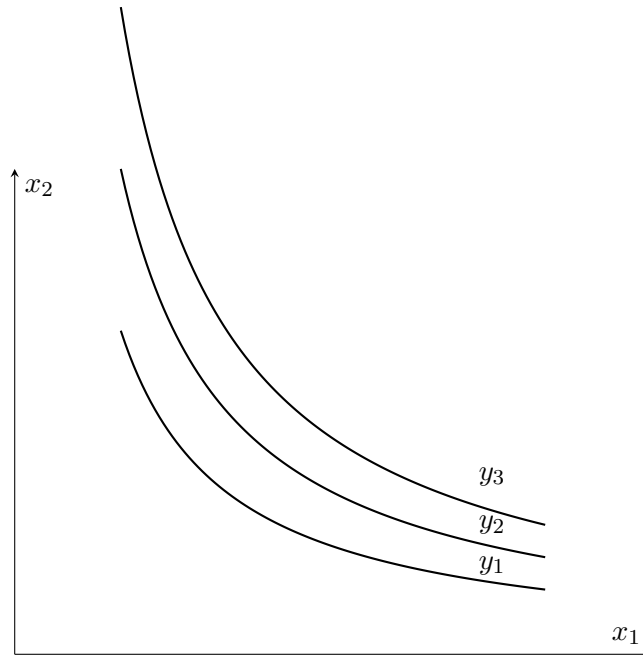


FIGURE 3.1 – Isoquantes : niveaux de production croissants

tel que :

$$f(K_0 + \delta, L_0 - ts(\delta)\delta) = f(K_0, L_0).$$

Lorsque  $\delta$  est suffisamment petit (et sous des hypothèses de régularité de la technologie), ce taux est bien défini.

Le taux marginal de substitution technique est alors défini comme la limite :

$$TMST_{K,L}(K_0, L_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} ts(\delta).$$

Géométriquement, ce taux correspond (à un signe près) à la pente de l'isoquante au point  $(K_0, L_0)$  :

$$TMST_{K,L} = -\frac{dL}{dK}.$$

Dans la suite, on retiendra une interprétation plus intuitive : le taux marginal de substitution technique mesure la quantité de travail que l'entreprise peut économiser lorsqu'elle augmente marginalement la quantité de capital, tout en maintenant sa production constante.

### 3.3. Coûts, prix des facteurs et droite d'isocoût

La technologie décrit ce que le producteur peut faire. Les prix des facteurs déterminent ce que ces choix coûtent. L'analyse du producteur repose sur la combinaison de ces deux éléments.

#### 3.3.1. Prix des facteurs

On note :

—  $w$  : le prix du facteur  $x_1$  (par exemple le salaire) ;

—  $r$  : le prix du facteur  $x_2$  (par exemple le coût du capital).

Si le producteur utilise une quantité  $(x_1, x_2)$  de facteurs, le coût total est :

$$C = wx_1 + rx_2.$$

**Interprétation.** Le coût est la valeur des ressources utilisées, évaluée aux prix du marché.

### 3.3.2. Droite d'isocoût

Pour un niveau de coût donné  $C$ , l'ensemble des combinaisons de facteurs accessibles est défini par :

$$wx_1 + rx_2 = C.$$

Cette équation définit une droite appelée *droite d'isocoût*.

On peut la réécrire sous la forme :

$$x_2 = \frac{C}{r} - \frac{w}{r}x_1.$$

- l'ordonnée à l'origine est  $\frac{C}{r}$  ;
- l'abscisse à l'origine est  $\frac{C}{w}$  ;
- la pente est  $-\frac{w}{r}$ .

### 3.3.3. Représentation graphique

Sur la figure 3.2, chaque point de la droite correspond à une combinaison de facteurs ayant le même coût total.

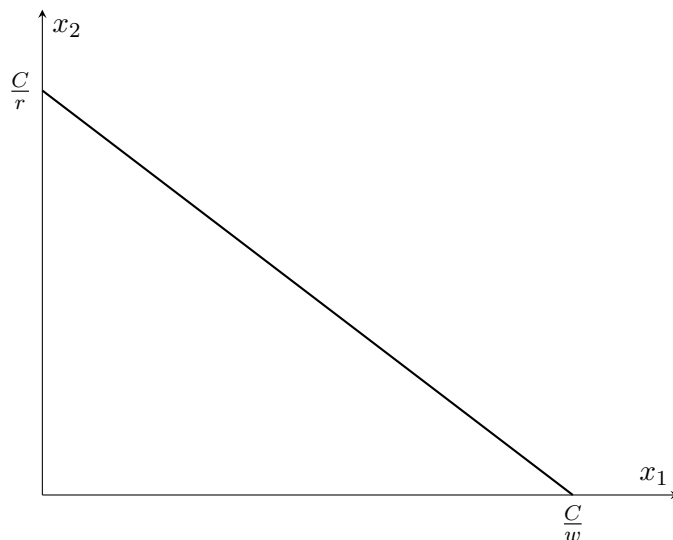


FIGURE 3.2 – Droite d'isocoût

### 3.3.4. Interprétation de la pente

La pente de la droite d'isocoût est :

$$-\frac{w}{r}.$$

Cette expression possède une interprétation économique fondamentale.

**Interprétation.** Le rapport  $\frac{w}{r}$  mesure le coût relatif des facteurs.

Plus précisément, pour obtenir une unité supplémentaire de  $x_1$ , il faut renoncer à  $\frac{w}{r}$  unités de  $x_2$ , afin de maintenir le coût constant.

Autrement dit,  $\frac{w}{r}$  représente le coût d'opportunité du facteur  $x_1$  en termes du facteur  $x_2$ .

### 3.3.5. Exemple numérique

Supposons :

$$w = 2, \quad r = 1.$$

Alors :

$$\frac{w}{r} = 2.$$

Le producteur doit renoncer à 2 unités de  $x_2$  pour utiliser une unité supplémentaire de  $x_1$ , à coût constant.

### 3.3.6. Variations de l'isocoût

**Variation du coût total.** Une augmentation de  $C$  déplace la droite d'isocoût parallèlement vers l'extérieur.

**Variation du prix d'un facteur.** Une variation de  $w$  ou  $r$  modifie la pente de la droite.

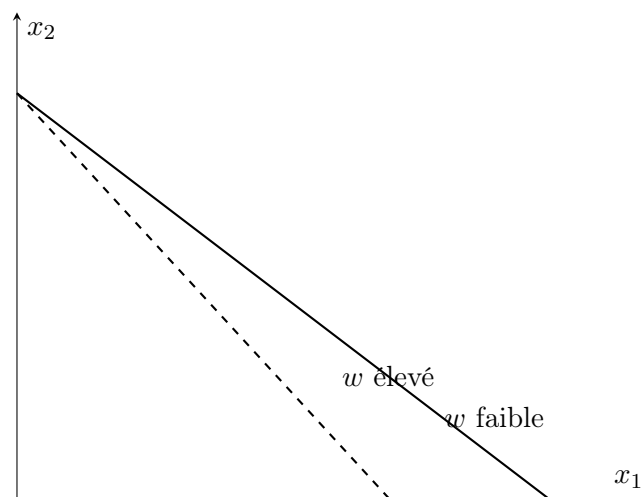


FIGURE 3.3 – Effet d'une hausse du prix du facteur  $x_1$

### 3.3.7. Conclusion

La droite d'isocoût joue, pour le producteur, un rôle exactement analogue à celui de la contrainte budgétaire pour le consommateur.

Elle représente l'ensemble des combinaisons de facteurs accessibles pour un niveau de coût donné.

L'analyse du producteur consistera à confronter cette contrainte aux possibilités techniques représentées par les isoquantes.

C'est de cette confrontation que naît le problème de minimisation des coûts.

## 3.4. Choix du producteur : minimisation des coûts

Le producteur cherche à produire un niveau donné de production au coût le plus faible possible. Ce problème est l'exact analogue du problème du consommateur, qui cherche à maximiser son utilité sous contrainte budgétaire.

### 3.4.1. Le problème du producteur

Pour un niveau de production donné  $y$ , le producteur choisit une combinaison de facteurs  $(x_1, x_2)$  qui minimise son coût :

$$C = wx_1 + rx_2,$$

sous la contrainte :

$$f(x_1, x_2) = y.$$

Autrement dit, il s'agit de trouver le point de l'isoquante  $y$  qui se situe sur la droite d'isocoût la plus basse possible.

### 3.4.2. Représentation graphique

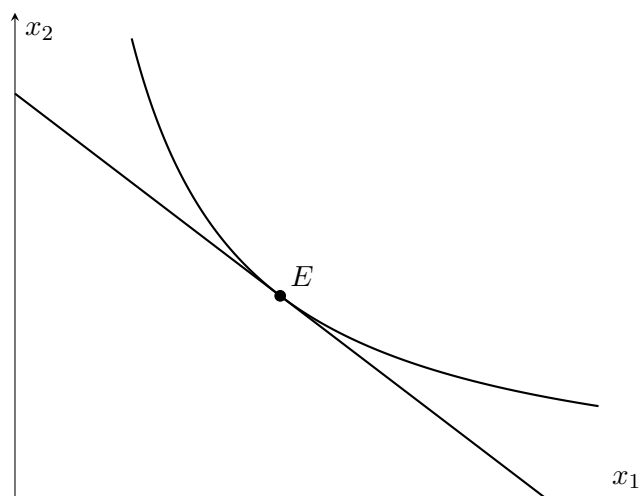


FIGURE 3.4 – Minimisation des coûts : tangence isoquante/isocoût

Le point  $E$  correspond à la combinaison de facteurs qui minimise le coût pour produire le niveau  $y$ .

### 3.4.3. Condition d'optimalité

Au point optimal, on a :

$$TMST = \frac{w}{r}.$$

**Interprétation.** Le taux de substitution technique (interne à la production) est égal au coût relatif des facteurs (imposé par le marché).

### 3.4.4. Trois lectures de l'optimum

**Lecture géométrique.** L'isoquante est tangente à la droite d'isocoût.

**Lecture en termes de taux d'échange.** Le TMST est égal au rapport des prix des facteurs.

**Lecture marginaliste.** Il n'existe plus de réarrangement technique permettant de réduire le coût.

### 3.4.5. Raisonnement par réarrangements marginaux

Supposons que le producteur ne soit pas à l'optimum.

Considérons une variation  $(dx_1, dx_2)$  telle que la production reste constante. Par définition du TMST :

$$dx_2 = -TMST \cdot dx_1.$$

Le coût associé à cette variation est :

$$dC = w dx_1 + r dx_2.$$

En substituant :

$$dC = (w - r TMST) dx_1.$$

Deux cas apparaissent :

- si  $TMST > \frac{w}{r}$ , il est possible de réduire le coût en augmentant  $x_1$  ;
- si  $TMST < \frac{w}{r}$ , il est possible de réduire le coût en augmentant  $x_2$ .

Ainsi, tant que :

$$TMST \neq \frac{w}{r},$$

il existe un réarrangement permettant de diminuer le coût.

### 3.4.6. Tableau des réarrangements marginaux

Cas  $TMST > \frac{w}{r}$  :

	Variation de $x_1$	Variation de $x_2$	Interprétation
Ajustement technique	$+dx_1$	$-TMST \cdot dx_1$	Production constante
Ajustement de coût	$+dx_1$	$-\frac{w}{r}dx_1$	Coût constant
Gain	0	$(TMST - \frac{w}{r}) dx_1$	Économie de $x_2$

Le producteur peut donc produire la même quantité à un coût plus faible.

### 3.4.7. Exemple numérique

Supposons :

$$TMST = 3, \quad \frac{w}{r} = 2.$$

	Variation de $x_1$	Variation de $x_2$
Ajustement technique	+1	-3
Ajustement de coût	+1	-2
Gain	0	+1

Le producteur peut réduire l'utilisation du facteur  $x_2$  tout en maintenant la production, ce qui diminue le coût.

### 3.4.8. Conclusion

Le raisonnement marginaliste conduit à une conclusion simple :

*À l'optimum, il n'existe aucun réarrangement technique permettant de réduire le coût.*

Cette condition est équivalente à :

$$TMST = \frac{w}{r}.$$

Comme dans le cas du consommateur, l'égalité des taux résulte de l'élimination de toutes les possibilités d'amélioration.

## 3.5. Fonction de coût et demandes de facteurs

La section précédente a permis de caractériser le choix optimal du producteur pour un niveau de production donné. Nous pouvons maintenant systématiser ce raisonnement en introduisant la fonction de coût et les demandes de facteurs.

### 3.5.1. La fonction de coût

Pour un niveau de production  $y$  et des prix des facteurs  $(w, r)$ , le producteur choisit la combinaison de facteurs qui minimise son coût.

Le coût minimal associé est appelé *fonction de coût* :

$$C = C(w, r, y).$$

**Interprétation.** La fonction de coût indique le coût minimal nécessaire pour produire  $y$ , compte tenu des prix des facteurs.

Elle résume l'ensemble du problème de minimisation des coûts.

### 3.5.2. Demandes de facteurs

La résolution du problème de minimisation des coûts détermine également les quantités optimales de facteurs.

On obtient ainsi les *demandes de facteurs* :

$$x_1 = x_1(w, r, y), \quad x_2 = x_2(w, r, y).$$

**Interprétation.** Ces fonctions décrivent comment le producteur ajuste l'utilisation des facteurs en fonction :

- des prix des facteurs ;
- du niveau de production souhaité.

### 3.5.3. Lien avec la condition d'optimalité

Les demandes de facteurs sont caractérisées par :

- la condition d'égalité des taux :

$$TMST = \frac{w}{r},$$

- la contrainte technologique :

$$f(x_1, x_2) = y.$$

Ces deux relations permettent de déterminer les quantités optimales de facteurs.

### 3.5.4. Exemple : fonction de production simple

Considérons la fonction de production :

$$y = x_1 x_2.$$

Le TMST est donné par :

$$TMST = \frac{x_2}{x_1}.$$

La condition d'optimalité donne :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{w}{r} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{w}{r}x_1.$$

En combinant avec la contrainte technologique :

$$x_1x_2 = y,$$

on obtient :

$$x_1 \cdot \frac{w}{r}x_1 = y \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = \frac{r}{w}y.$$

D'où :

$$x_1 = \sqrt{\frac{r}{w}y}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{w}{r}y}.$$

### 3.5.5. Fonction de coût associée

Le coût est :

$$C = wx_1 + rx_2.$$

En substituant :

$$C = w\sqrt{\frac{r}{w}y} + r\sqrt{\frac{w}{r}y}.$$

On obtient :

$$C = 2\sqrt{wry}.$$

**Interprétation.** Le coût dépend :

- du niveau de production ;
- des prix des facteurs ;
- de leur interaction (produit  $wr$ ).

### 3.5.6. Lecture économique

Cet exemple met en évidence plusieurs propriétés générales.

**Substitution des facteurs.** Si le prix d'un facteur augmente, le producteur en utilise moins et substitue l'autre facteur.

**Symétrie.** Les deux facteurs jouent ici un rôle symétrique.

**Adaptation aux prix.** Les demandes de facteurs dépendent uniquement des prix relatifs et du niveau de production.

### 3.5.7. Remarque méthodologique

Dans cet exemple, les demandes de facteurs et la fonction de coût ont été obtenues sans recourir aux méthodes d'optimisation formelle.

Le raisonnement repose uniquement sur :

- l'égalité des taux ;
- la contrainte technologique.

Cette méthode est parfaitement analogue à celle utilisée pour le consommateur.

### 3.5.8. Conclusion

La fonction de coût et les demandes de facteurs constituent des outils essentiels pour décrire le comportement du producteur.

Elles permettent de relier :

- la technologie ;
- les prix des facteurs ;
- les choix de production.

La section suivante introduira le problème de maximisation du profit, qui détermine le niveau de production lui-même.

## 3.6. Objectif de l'entreprise : fondements et limites de la maximisation du profit

La théorie du producteur repose sur une hypothèse centrale : l'entreprise maximise son profit. Cette hypothèse, omniprésente dans l'analyse microéconomique, mérite d'être discutée.

Contrairement aux préférences du consommateur, qui sont généralement considérées comme données, l'objectif de l'entreprise est plus problématique. Il dépend de la manière dont celle-ci est organisée, de la structure de propriété, et du cadre institutionnel dans lequel elle opère.

### 3.6.1. L'entreprise comme organisation détenue par des consommateurs

Considérons une économie dans laquelle il n'existe qu'une seule entreprise, produisant un bien  $y$  à l'aide de facteurs de production, par exemple le travail  $L$  et le capital  $K$ .

Le profit de l'entreprise est défini par :

$$\pi = py - wL - rK,$$

où :

- $p$  est le prix du bien produit ;
- $w$  et  $r$  sont les prix des facteurs ;
- $y = f(L, K)$  est la production.

L'entreprise est supposée détenue par un ensemble d'individus  $i = 1, \dots, I$ , chacun possédant une part  $\theta_i$  du capital de l'entreprise, avec :

$$\sum_{i=1}^I \theta_i = 1.$$

Cette part donne droit :

- à une fraction  $\theta_i$  des profits (dividendes) ;
- à une fraction  $\theta_i$  des droits de vote dans les décisions collectives.

**Remarque.** Dans la réalité, il existe des titres financiers plus complexes (actions sans droit de vote, dette, etc.). Nous nous concentrons ici sur le cas standard où propriété et contrôle coïncident.

### 3.6.2. Contrainte budgétaire d'un actionnaire-consommateur

Chaque individu est à la fois :

- consommateur ;
- éventuellement travailleur ;
- actionnaire de l'entreprise.

Sa contrainte budgétaire s'écrit :

$$p_x x_i + p_y y_i \leq w l_i + r k_i + \theta_i \pi,$$

où  $\theta_i \pi$  représente le dividende reçu.

**Interprétation.** Le profit de l'entreprise apparaît comme une ressource dans le budget des consommateurs.

### 3.6.3. Justification de la maximisation du profit en concurrence parfaite

Dans un cadre de concurrence pure et parfaite, chaque agent prend les prix comme donnés. En particulier :

- le prix du bien produit est donné ;
- les prix des facteurs sont donnés ;
- les décisions de l'entreprise n'affectent pas ces prix.

Dans ce contexte, chaque actionnaire considère que :

- sa part  $\theta_i$  est donnée ;
- le profit  $\pi$  dépend des décisions de l'entreprise ;
- son revenu augmente avec  $\pi$ .

Ainsi, pour tout individu  $i$ , une augmentation du profit entraîne une augmentation de ses ressources :

$$\frac{\partial}{\partial \pi} (w l_i + r k_i + \theta_i \pi) = \theta_i > 0.$$

**Conclusion.** Tous les actionnaires ont intérêt à ce que le profit soit aussi élevé que possible.

Il en résulte une unanimité des actionnaires en faveur de la maximisation du profit. L'objectif de l'entreprise apparaît alors comme le résultat d'un processus collectif cohérent avec les intérêts individuels.

### 3.6.4. Une limite de la symétrie avec le consommateur

Cette justification met en évidence une différence importante avec la théorie du consommateur.

Les préférences sont supposées données et cohérentes. En revanche, l'objectif de l'entreprise est le résultat d'une agrégation d'intérêts individuels, qui n'est pas toujours simple.

### 3.6.5. Un exemple de conflit : le monopole

Considérons une entreprise en situation de monopole, détenue par deux actionnaires  $A$  et  $B$ , chacun possédant une part  $\theta = \frac{1}{2}$ .

Supposons que :

- $A$  consomme une part importante du bien produit ;
- $B$  ne consomme pas ce bien.

Le choix du prix affecte alors deux dimensions :

- le profit (et donc le dividende) ;
- le prix payé par  $A$  en tant que consommateur.

**Conséquence.**

- $B$  souhaite maximiser le profit ;
- $A$  arbitre entre profit et pouvoir d'achat.

Il n'y a donc plus unanimité sur l'objectif de l'entreprise.

**Interprétation.** L'objectif collectif devient analogue à celui d'un processus politique, résultant de préférences hétérogènes.

### 3.6.6. Quand la maximisation du profit redevient pertinente

Dans les grandes économies, où chaque consommateur ne représente qu'une part négligeable de la demande d'un bien, l'effet du prix sur son pouvoir d'achat devient faible.

Dans ce cas, même si les entreprises disposent d'un certain pouvoir de marché, les actionnaires ont à nouveau intérêt à maximiser le profit.

Ce résultat est au cœur de nombreux travaux, notamment ceux d'Oliver Hart sur les économies avec un grand nombre d'agents.

### 3.6.7. Remarque sur l'incertitude

Dans des environnements incertains, en particulier lorsque les marchés financiers sont incomplets, ne sont pas assez fournis, la notion même de profit peut devenir problématique.

Dans ces contextes, l'objectif de l'entreprise peut ne pas être bien défini, ou dépendre de la structure des marchés financiers.

Ces questions dépassent le cadre du présent chapitre.

### 3.6.8. Conclusion

Dans le cadre retenu ici — concurrence pure et parfaite, absence d'incertitude — la maximisation du profit apparaît comme une règle de décision cohérente avec les intérêts des actionnaires.

Elle n'est toutefois pas une hypothèse universelle, mais le résultat d'un ensemble de conditions institutionnelles et économiques spécifiques.

Dans la suite du chapitre, nous adopterons cette règle, tout en gardant à l'esprit les limites de sa validité.

## 3.7. Maximisation du profit

La section précédente a justifié, dans le cadre de la concurrence pure et parfaite, l'hypothèse de maximisation du profit. Nous en étudions maintenant les implications.

### 3.7.1. Le problème de la firme

Le profit de l'entreprise est donné par :

$$\pi = p y - C(w, r, y),$$

où :

- $p$  est le prix du bien produit ;
- $y$  est le niveau de production ;
- $C(w, r, y)$  est le coût minimal de production.

Le producteur choisit  $y$  de manière à maximiser  $\pi$ .

### 3.7.2. Recette et coût

La fonction de profit peut être décomposée en deux éléments :

- la recette :  $R(y) = p y$  ;
- le coût :  $C(y)$ .

**Interprétation.** Produire une unité supplémentaire augmente la recette de  $p$ , mais augmente aussi le coût.

### 3.7.3. Raisonnement marginaliste

Considérons une variation marginale de la production  $dy$ .

La variation du profit est :

$$d\pi = p dy - C'(y) dy = (p - C'(y)) dy,$$

où  $C'(y)$  désigne le coût marginal.

Deux cas apparaissent :

- si  $p > C'(y)$ , augmenter la production accroît le profit ;

— si  $p < C'(y)$ , augmenter la production réduit le profit.

**Conclusion.** Le profit est maximal lorsque :

$$p = C'(y).$$

#### 3.7.4. Interprétation économique

Cette condition signifie que :

- le prix mesure la recette marginale ;
- le coût marginal mesure le coût de production d'une unité supplémentaire ;
- à l'optimum, les deux sont égaux.

Autrement dit, l'entreprise produit jusqu'au point où produire une unité supplémentaire ne rapporte plus que ce qu'elle coûte.

#### 3.7.5. Lien avec le choix des facteurs

La fonction de coût étant elle-même issue de la minimisation des coûts, le choix de production et le choix des facteurs sont liés.

Le producteur :

- choisit  $y$  tel que  $p = C'(y)$  ;
- choisit ensuite les facteurs  $(x_1, x_2)$  minimisant le coût pour produire ce niveau.

Ainsi, l'ensemble des décisions du producteur est cohérent.

#### 3.7.6. Exemple

Considérons la fonction de coût :

$$C(y) = 2\sqrt{wry}.$$

Le coût marginal est :

$$C'(y) = \sqrt{\frac{wr}{y}}.$$

La condition  $p = C'(y)$  donne :

$$p = \sqrt{\frac{wr}{y}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{wr}{p^2}.$$

On obtient ainsi une fonction d'offre.

#### 3.7.7. Offre de la firme

La relation :

$$y = y(p, w, r)$$

définit la fonction d'offre de la firme.

**Interprétation.** La quantité offerte dépend :

- du prix du bien ;
- des prix des facteurs.

En général, plus le prix est élevé, plus la production est importante.

### 3.7.8. Conclusion

Le raisonnement marginaliste conduit à une règle simple :

*La firme produit jusqu'à ce que le prix soit égal au coût marginal.*

Cette règle joue un rôle central dans l'analyse microéconomique. Elle permet de relier les décisions individuelles des producteurs au fonctionnement global des marchés.

La section suivante examinera comment les propriétés de la technologie, en particulier les rendements d'échelle, influencent ce comportement.

## 3.8. Rendements d'échelle et structure de marché

Les propriétés de la technologie de production jouent un rôle déterminant dans le comportement de la firme et dans l'organisation des marchés. Parmi ces propriétés, les rendements d'échelle occupent une place centrale.

### 3.8.1. Définition globale des rendements d'échelle

On s'intéresse à l'effet d'une variation proportionnelle de tous les facteurs de production.

Soit une fonction de production  $f(K, L)$ . Pour  $\lambda > 0$ , on compare :

$$f(\lambda K, \lambda L) \quad \text{et} \quad \lambda f(K, L).$$

On distingue trois cas :

— **Rendements d'échelle constants :**

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$$

— **Rendements d'échelle croissants :**

$$f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$$

— **Rendements d'échelle décroissants :**

$$f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$$

### 3.8.2. Mesure locale des rendements d'échelle

Pour affiner cette analyse, on introduit une mesure locale.

Définissons la fonction :

$$g(\lambda; K, L) = f(\lambda K, \lambda L) - \lambda f(K, L).$$

Cette fonction mesure l'écart entre :

- la production obtenue en multipliant les facteurs ;
- la production proportionnellement augmentée.

On calcule la dérivée de  $g$  par rapport à  $\lambda$ , en tenant  $K$  et  $L$  constants :

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = \frac{\partial f(\lambda K, \lambda L)}{\partial \lambda} - f(K, L).$$

Par la règle de dérivation :

$$\frac{\partial f(\lambda K, \lambda L)}{\partial \lambda} = f_K(\lambda K, \lambda L) \cdot K + f_L(\lambda K, \lambda L) \cdot L.$$

En évaluant en  $\lambda = 1$ , on obtient :

$$g'(1; K, L) = f_K(K, L) \cdot K + f_L(K, L) \cdot L - f(K, L).$$

#### **Interprétation.**

- si  $g'(1; K, L) > 0$  : rendements d'échelle localement croissants ;
- si  $g'(1; K, L) = 0$  : rendements constants ;
- si  $g'(1; K, L) < 0$  : rendements décroissants.

Cette mesure relie directement les rendements d'échelle aux productivités marginales des facteurs.

### 3.8.3. Rendements d'échelle et profit en concurrence parfaite

En concurrence parfaite, les facteurs sont rémunérés à leur productivité marginale :

$$\frac{w}{p} = f_L(K, L), \quad \frac{r}{p} = f_K(K, L).$$

On peut alors écrire :

$$f_K(K, L) \cdot K + f_L(K, L) \cdot L = \frac{r}{p}K + \frac{w}{p}L.$$

En substituant dans l'expression de  $g'(1; K, L)$  :

$$g'(1; K, L) = \frac{r}{p}K + \frac{w}{p}L - f(K, L).$$

Or :

$$\pi = pf(K, L) - wL - rK,$$

donc :

$$\frac{\pi}{p} = f(K, L) - \frac{w}{p}L - \frac{r}{p}K.$$

D'où :

$$g'(1; K, L) = -\frac{\pi}{p}.$$

### Conclusion.

- si rendements constants  $\Rightarrow \pi = 0$  ;
- si rendements croissants  $\Rightarrow \pi > 0$  ;
- si rendements décroissants  $\Rightarrow \pi < 0$ .

**Implication.** En concurrence parfaite, l'existence d'un équilibre avec profit nul est incompatible avec des rendements d'échelle croissants.

Ce résultat, déjà discuté dans la littérature classique (notamment dans les débats autour de Wicksteed), met en évidence une tension fondamentale entre technologie et concurrence.

#### 3.8.4. Lien entre rendements d'échelle et coût moyen

On souhaite maintenant relier les rendements d'échelle à la forme de la fonction de coût.

Le coût total minimal pour produire  $y$  est  $C(y)$ , et le coût moyen est :

$$CM(y) = \frac{C(y)}{y}.$$

L'analyse précédente implique :

- rendements croissants  $\Rightarrow CM(y)$  décroissant ;
- rendements constants  $\Rightarrow CM(y)$  constant ;
- rendements décroissants  $\Rightarrow CM(y)$  croissant.

**Intuition.** Si doubler les facteurs plus que double la production, alors produire une unité devient moins coûteux lorsque l'échelle augmente.

#### 3.8.5. Lien entre coût moyen et coût marginal

On peut préciser la relation entre coût moyen et coût marginal.

Le coût marginal est :

$$Cm(y) = C'(y).$$

En dérivant le coût moyen :

$$CM'(y) = \frac{yC'(y) - C(y)}{y^2}.$$

Donc :

$$CM'(y) \geq 0 \iff C'(y) \geq \frac{C(y)}{y}.$$

Autrement dit :

- si  $Cm < CM$ , alors  $CM$  décroît ;
- si  $Cm > CM$ , alors  $CM$  croît.

### 3.8.6. Conséquences pour la structure de marché

Les rendements d'échelle ont des implications directes sur l'organisation des marchés.

En présence de rendements croissants :

- les grandes firmes sont plus efficaces ;
- la production tend à se concentrer ;
- la concurrence parfaite devient difficile à soutenir.

Dans certains cas, une seule entreprise peut produire à moindre coût : on parle alors de *monopole naturel*.

### 3.8.7. Conclusion

Les rendements d'échelle relient de manière étroite :

- les propriétés locales de la technologie ;
- la formation des coûts ;
- l'existence du profit ;
- et la structure des marchés.

Ils mettent en évidence une limite importante du cadre concurrentiel, qui repose implicitement sur des conditions technologiques particulières.

## 3.9. Extension : production jointe et frontières de transformation

Jusqu'à présent, la technologie a été représentée par une fonction de production associant plusieurs facteurs à un seul bien. Cette représentation est restrictive.

Dans de nombreuses situations, une entreprise produit simultanément plusieurs biens. Il est alors nécessaire d'adopter une représentation plus générale de la technologie.

### 3.9.1. Ensembles de production

La technologie peut être décrite comme un *ensemble de production*, noté  $Y$ , constitué de tous les plans de production techniquement réalisables :

$$Y \subset \mathbb{R}^{L+M},$$

où :

- les composantes négatives représentent les inputs ;
- les composantes positives représentent les outputs.

Un élément de  $Y$  est donc un vecteur décrivant simultanément :

- les quantités de facteurs utilisées ;
- les quantités de biens produites.

**Interprétation.** L'ensemble  $Y$  constitue une sorte de « grand livre » des combinaisons input-output techniquement possibles.

### 3.9.2. Frontière de transformation

Dans le cas de deux biens produits  $(Q_1, Q_2)$ , on peut représenter la technologie par une *frontière de transformation*.

Cette frontière décrit les combinaisons maximales de production :

$$Q_2 = g(Q_1).$$

Elle sépare :

- les combinaisons réalisables (en dessous) ;
- les combinaisons irréalisables (au-dessus).

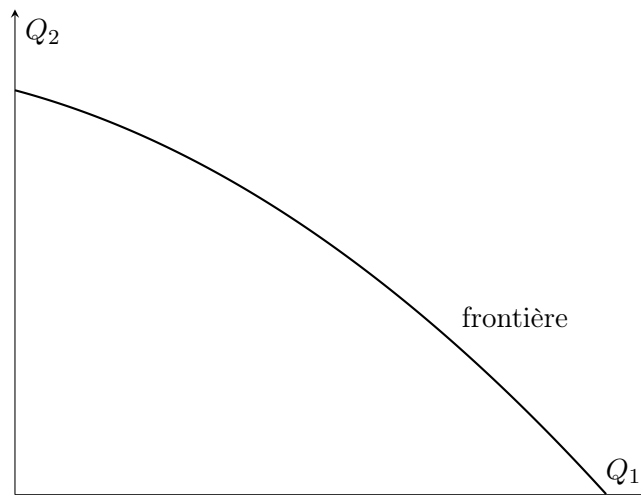


FIGURE 3.5 – Frontière de transformation

### 3.9.3. Taux marginal de transformation

Le long de la frontière, il est possible de transformer un bien en un autre.

**Définition.** Le taux marginal de transformation (TMT) mesure la quantité de  $Q_2$  à laquelle il faut renoncer pour produire une unité supplémentaire de  $Q_1$ .

Géométriquement, le TMT est la pente (en valeur absolue) de la frontière :

$$TMT = -\frac{dQ_2}{dQ_1}.$$

**Interprétation.**

- coût d'opportunité de  $Q_1$  en termes de  $Q_2$  ;
- analogue productif du TMS du consommateur.

### 3.9.4. Lien avec les fonctions de production

Dans certains cas particuliers, une frontière de transformation peut être dérivée de fonctions de production.

Considérons une entreprise disposant d'une quantité totale de travail  $L$ , répartie entre deux unités de production :

- une première unité produit  $Q_1 = f_1(L_1)$  ;
- une seconde produit  $Q_2 = f_2(L_2)$  ;

avec :

$$L_1 + L_2 = L.$$

On peut écrire :

$$Q_2 = f_2(L - L_1).$$

Si  $f_1$  est inversible :

$$L_1 = f_1^{-1}(Q_1),$$

d'où :

$$Q_2 = f_2(L - f_1^{-1}(Q_1)).$$

On obtient ainsi une fonction de transformation :

$$Q_2 = g(Q_1; L).$$

### 3.9.5. Exemple

Supposons :

$$f_1(L_1) = \sqrt{L_1}, \quad f_2(L_2) = \sqrt{L_2}.$$

Alors :

$$L_1 = Q_1^2, \quad L_2 = L - Q_1^2,$$

et donc :

$$Q_2 = \sqrt{L - Q_1^2}.$$

Cette relation définit explicitement la frontière de transformation.

### 3.9.6. Remarque sur les limites de cette construction

Cette construction repose sur une hypothèse forte : les deux unités de production sont indépendantes.

En particulier :

- il n'y a pas d'interactions entre les productions ;

- les coûts ne sont pas partagés ;
- les technologies sont séparables.

Dans la réalité, ces conditions sont rarement satisfaites.

Le fait de produire plusieurs biens au sein d'une même entreprise permet souvent :

- des économies d'échelle ;
- des coûts fixes partagés ;
- des interactions technologiques.

Dans ce cas, il devient impossible de définir des fonctions de production indépendantes pour chaque bien.

La représentation par un ensemble de production ou une frontière de transformation devient alors indispensable.

### 3.9.7. Conclusion

La production jointe conduit à une représentation plus générale de la technologie.

Elle introduit une nouvelle notion centrale : le taux marginal de transformation, qui mesure les arbitrages productifs entre biens.

Cette notion joue un rôle fondamental dans l'analyse de l'équilibre général, où elle sera confrontée aux préférences des consommateurs.

### 3.9.8. Maximisation du profit et taux marginal de transformation

Dans le cas de la production jointe, l'entreprise choisit simultanément les quantités de biens produits.

Le profit s'écrit :

$$\pi = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 - wL - rK,$$

où  $(Q_1, Q_2)$  doivent satisfaire la contrainte technologique :

$$F(Q_1, Q_2; L, K) = 0.$$

### Raisonnement marginaliste

Considérons une variation marginale  $(dQ_1, dQ_2)$  le long de la frontière de transformation, c'est-à-dire telle que :

$$dF = F_{Q_1} dQ_1 + F_{Q_2} dQ_2 = 0.$$

On en déduit :

$$\frac{dQ_2}{dQ_1} = -\frac{F_{Q_1}}{F_{Q_2}}.$$

Le taux marginal de transformation est donc :

$$TMT = \frac{F_{Q_1}}{F_{Q_2}}.$$

La variation du profit associée est :

$$d\pi = p_1 dQ_1 + p_2 dQ_2.$$

En substituant :

$$d\pi = \left( p_1 - p_2 \frac{F_{Q_1}}{F_{Q_2}} \right) dQ_1.$$

### Condition d'optimalité

Deux cas apparaissent :

- si  $p_1 > p_2 \frac{F_{Q_1}}{F_{Q_2}}$ , il est profitable d'augmenter  $Q_1$  ;
- si  $p_1 < p_2 \frac{F_{Q_1}}{F_{Q_2}}$ , il est profitable d'augmenter  $Q_2$ .

À l'optimum :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{F_{Q_1}}{F_{Q_2}}.$$

**Interprétation.** Le taux marginal de transformation est égal au rapport des prix.

Autrement dit, le taux d'échange technique entre les biens est égal au taux d'échange du marché.

### Lien avec les productivités marginales

Dans le cas particulier où la frontière de transformation est dérivée de fonctions de production séparées, on peut relier le TMT aux productivités marginales.

Reprenons la construction précédente :

$$Q_1 = f_1(L_1, K_1), \quad Q_2 = f_2(L_2, K_2),$$

avec :

$$L_1 + L_2 = L, \quad K_1 + K_2 = K.$$

À l'optimum, une réallocation marginale des facteurs doit laisser le profit inchangé.

Considérons par exemple le travail :

$$\frac{\partial Q_1}{\partial L_1} = f_{1L}, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial L_2} = f_{2L}.$$

La condition d'optimalité implique :

$$p_1 f_{1L} = p_2 f_{2L}.$$

De même pour le capital :

$$p_1 f_{1K} = p_2 f_{2K}.$$

**Interprétation.** La valeur de la productivité marginale d'un facteur doit être la même dans toutes les utilisations.

Ces conditions impliquent que le TMT peut être interprété comme un rapport de productivités marginales :

$$TMT = \frac{f_{1L}}{f_{2L}} = \frac{f_{1K}}{f_{2K}}.$$

### Conclusion

La maximisation du profit dans le cas de la production jointe conduit à une règle simple :

*Le taux marginal de transformation doit être égal au rapport des prix.*

Cette condition prolonge directement les résultats obtenus dans les sections précédentes :

- $TMS = \frac{p_1}{p_2}$  pour le consommateur ;
- $TMST = \frac{w}{r}$  pour le choix des facteurs ;
- $TMT = \frac{p_1}{p_2}$  pour la production jointe.

Elle constitue un élément fondamental de l'analyse de l'équilibre général, où ces différentes égalités seront mises en relation.

## Chapitre 4

# L'équilibre général en économie d'échange

### 4.1. Introduction

La vie économique se caractérise par une multiplicité d'échanges, impliquant une grande diversité d'agents, de biens et de décisions. Chaque individu poursuit ses propres objectifs, dispose d'informations limitées, et agit de manière décentralisée. Dans un tel contexte, une question fondamentale se pose : comment ces décisions individuelles peuvent-elles être coordonnées de manière à assurer une certaine cohérence d'ensemble ?

Cette question n'est pas nouvelle. Les économistes classiques, et notamment Ricardo dans les *Principes* [Ricardo, 1817], évoquaient déjà la complexité de l'approvisionnement d'une grande ville : comment s'assurer que les biens produits correspondent effectivement aux besoins des consommateurs ? Comment éviter à la fois les pénuries et les excédents ?

L'histoire économique fournit des illustrations concrètes de la difficulté du problème. Les économies planifiées d'Europe de l'Est ont été confrontées, de manière récurrente, à des déséquilibres persistants : rayons vides pour certains biens, abondance de produits non demandés pour d'autres, files d'attente pour accéder à des ressources rares. Ces situations témoignent des difficultés de coordination lorsque les décisions sont centralisées, malgré les efforts et les compétences des planificateurs.

Le problème de la coordination peut être formulé de manière plus abstraite. Comment, en l'absence de coordination explicite entre les agents, éviter le désordre ? L'économiste Jacques Rueff (1896 - 1978) rapporte avoir posé cette question au mathématicien Émile Borel, en termes probabilistes : quelle est la probabilité qu'un système décentralisé d'actions individuelles aboutisse à un résultat cohérent ? La réponse de Borel est restée célèbre : elle serait comparable à celle « qu'un singe tapant au hasard sur une machine à écrire reconstitue sans erreur l'ensemble des ouvrages de la Bibliothèque nationale ».

Et pourtant, les économies de marché ne se présentent pas nécessairement comme des systèmes chaotiques. Elles manifestent, dans une certaine mesure, une forme d'ordre : les biens sont généralement disponibles, les échanges ont lieu, les décisions individuelles semblent compatibles entre elles.

Comment expliquer cette apparente contradiction ?

Une réponse classique, associée à la tradition libérale, invoque le rôle de la « main invisible » : les interactions décentralisées, médiatisées par les prix, conduiraient spontanément à une coordination des actions individuelles. Cette intuition, célèbre mais souvent formulée de manière littéraire, appelle une formalisation rigoureuse.

L'une des contributions majeures de la microéconomie a précisément consisté à proposer une telle formalisation. Dans un cadre bien défini — agents rationnels, marchés concurrentiels, prix pris comme donnés — elle montre comment un système de prix peut, dans certaines conditions, coordonner les décisions individuelles et conduire à un état d'équilibre. [Arrow and Debreu, 1954] [Debreu, 1959]

Il convient toutefois de souligner la portée et les limites de cette démarche. Le modèle d'équilibre général ne prétend pas décrire fidèlement la complexité des économies réelles. Il constitue avant tout un exercice intellectuel, visant à isoler et à analyser un mécanisme de coordination particulier : celui des marchés.

C'est à l'étude de ce mécanisme que ce chapitre est consacré. Nous commencerons par examiner le cas le plus simple : une économie d'échange, dans laquelle les agents ne produisent pas, mais échangent des dotations initiales de biens.

## 4.2. Une économie d'échange : cadre et notations

Nous considérons une économie simplifiée, dite *économie d'échange*, dans laquelle il n'y a pas de production : les biens disponibles proviennent uniquement des dotations initiales des agents.

L'objectif est d'étudier comment ces biens peuvent être échangés entre les agents, et comment un système de prix peut coordonner ces échanges.

### 4.2.1. Les agents et les biens

On considère :

- un ensemble fini d'agents, indexés par  $i = 1, \dots, I$  ;
- un ensemble de biens, indexés par  $l = 1, \dots, L$ .

Un panier de consommation pour l'agent  $i$  est un vecteur :

$$x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^L) \in \mathbb{R}_+^L.$$

### 4.2.2. Les préférences

Chaque agent  $i$  est caractérisé par une relation de préférence  $\succeq_i$  définie sur l'ensemble des paniers.

Comme dans la théorie du consommateur, on suppose que ces préférences sont :

- complètes ;
- transitives ;
- monotones.

Elles peuvent être représentées par une fonction d'utilité :

$$u_i(x_i).$$

#### 4.2.3. Les dotations initiales

Chaque agent  $i$  dispose d'une dotation initiale :

$$\omega_i = (\omega_i^1, \dots, \omega_i^L).$$

Ces dotations représentent les ressources dont disposent les agents avant tout échange.

La dotation totale de l'économie est :

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^I \omega_i.$$

#### 4.2.4. Les échanges

Un *allocation* est une collection de paniers  $(x_1, \dots, x_I)$  telle que :

$$\sum_{i=1}^I x_i = \bar{\omega}.$$

Cette condition exprime la contrainte de ressources : les quantités consommées ne peuvent excéder les quantités disponibles.

#### 4.2.5. Les prix et les budgets

Les échanges sont organisés sur des marchés, caractérisés par un vecteur de prix :

$$p = (p^1, \dots, p^L) \in \mathbb{R}_+^L.$$

Chaque agent prend les prix comme donnés.

La valeur de sa dotation est :

$$p \cdot \omega_i = \sum_{l=1}^L p^l \omega_i^l.$$

La contrainte budgétaire de l'agent  $i$  est :

$$p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i.$$

**Interprétation.** L'agent peut vendre sa dotation et acheter le panier qu'il souhaite aux prix du marché.

#### 4.2.6. Demande individuelle

Pour un vecteur de prix donné, chaque agent choisit un panier  $x_i$  qui maximise son utilité sous contrainte budgétaire.

On obtient une fonction de demande :

$$x_i = x_i(p, p \cdot \omega_i).$$

#### 4.2.7. Équilibre des marchés

Une allocation est réalisable si elle respecte la contrainte de ressources. Elle est compatible avec les comportements individuels si chaque agent maximise son utilité.

La question centrale est alors la suivante : existe-t-il un système de prix tel que les décisions individuelles soient compatibles entre elles ?

Autrement dit, peut-on trouver des prix tels que les demandes des agents égalisent les ressources disponibles ?

#### 4.2.8. Conclusion

Le cadre d'une économie d'échange permet de formuler de manière précise le problème de la coordination économique.

Chaque agent poursuit son intérêt propre, prend les prix comme donnés, et choisit librement son panier.

La section suivante introduira un outil graphique particulièrement utile dans le cas de deux agents et deux biens : la boîte d'Edgeworth.

### 4.3. La boîte d'Edgeworth, le noyau et la coordination des échanges

La représentation la plus éclairante d'une économie d'échange à deux agents et deux biens est fournie par la boîte d'Edgeworth. Cet outil graphique permet de visualiser simultanément :

- les préférences des agents ;
- les dotations initiales ;
- les allocations réalisables ;
- les possibilités d'échanges mutuellement avantageux ;
- et les conditions d'efficacité.

#### 4.3.1. Construction de la boîte

Considérons deux agents,  $A$  et  $B$ , et deux biens 1 et 2.

La boîte est construite comme suit :

- sa largeur est égale à la quantité totale du bien 1 ;
- sa hauteur est égale à la quantité totale du bien 2 ;

Chaque point de la boîte représente une allocation  $(x_A, x_B)$  telle que :

$$x_A + x_B = \bar{\omega}.$$

L'origine de l'agent  $A$  est située en bas à gauche, celle de  $B$  en haut à droite.

On superpose les courbes d'indifférence des deux agents.

#### 4.3.2. Dotation initiale et gains à l'échange

La dotation initiale est représentée par un point  $E$  dans la boîte.

Les allocations préférées à  $E$  par les deux agents définissent une zone en forme de lentille :

- ce sont les échanges mutuellement avantageux ;
- ils correspondent à des améliorations au sens de Pareto.

#### 4.3.3. Courbe des contrats

La courbe des contrats est l'ensemble des points où les courbes d'indifférence sont tangentes :

$$TMS_A = TMS_B.$$

Elle représente les allocations efficaces.

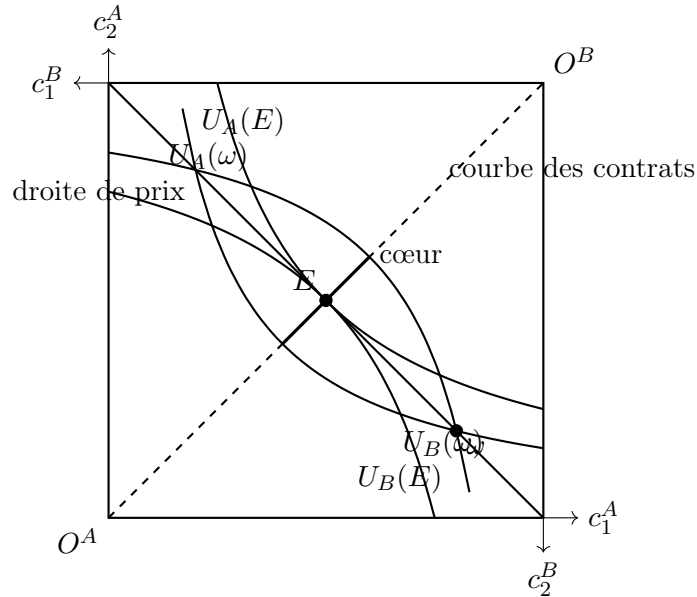


FIGURE 4.1 – Boîte d'Edgeworth : dotation, cœur et équilibre walrasien

#### 4.3.4. Le noyau (core)

Depuis Cournot (1838), de nombreux efforts ont été entrepris pour fonder l'équilibre de concurrence pure et parfaite comme le résultat d'interactions entre agents, lorsque leur nombre devient suffisamment grand pour que chacun soit négligeable.

Une des premières tentatives en ce sens est due à Edgeworth dans *Mathematical Psychics* (1881) [Edgeworth, 1881]. Plutôt que de spécifier un mécanisme précis d'échange, Edgeworth propose de caractériser les allocations qui pourraient résulter d'un processus de négociation entre agents.

Son idée est la suivante : une allocation est acceptable si aucun groupe d'agents (une coalition) ne peut s'en écarter pour obtenir une situation préférable pour tous ses membres.

Plus précisément, une coalition  $S$  peut *bloquer* une allocation  $(x^A, x^B)$  s'il existe une autre allocation  $(y^i)_{i \in S}$  telle que :

- les ressources de la coalition sont respectées :

$$\sum_{i \in S} y^i = \sum_{i \in S} \omega^i;$$

- chaque membre de la coalition y trouve un gain :

$$y^i \succ x^i \quad \text{pour tout } i \in S,$$

avec une amélioration stricte pour au moins un agent.

Le *noyau* (core) est alors l'ensemble des allocations qui ne peuvent être bloquées par aucune coalition.

Ce concept ne fait intervenir ni prix, ni mécanisme d'ajustement : seule compte la possibilité d'améliorations mutuelles entre agents. Il est souvent interprété comme le résultat d'un processus implicite de marchandage.

Dans une économie à deux agents, la caractérisation du noyau est particulièrement simple. Il n'existe en effet que trois coalitions possibles :  $\{A\}$ ,  $\{B\}$  et  $\{A, B\}$ .

- Si une allocation n'est pas Pareto efficace, la coalition  $\{A, B\}$  peut la bloquer en se réallouant les ressources de manière plus efficace.
- Si un agent préfère sa dotation initiale à l'allocation proposée, il peut refuser l'échange : la coalition individuelle  $\{A\}$  ou  $\{B\}$  bloque alors l'allocation.

Ainsi, le noyau est constitué des allocations :

- Pareto efficaces ;
- préférées à la dotation initiale par chacun des agents.

Dans la boîte d'Edgeworth, cela correspond à la portion de la courbe des contrats située au-dessus des courbes d'indifférence passant par la dotation initiale. Le noyau est donc un segment, et non un point : le résultat du marchandage est indéterminé.

L'intuition d'Edgeworth était que cette indétermination disparaîtrait lorsque le nombre d'agents augmente. Lorsque chaque agent devient négligeable, les possibilités de déviation collective se restreignent fortement.

### **Encadré : Genèse et portée analytique de la boîte d'Edgeworth**

La boîte d'Edgeworth est aujourd'hui un outil central de la microéconomie. Pourtant, son histoire [Humphrey, 1996] est souvent absente des manuels. Elle est le résultat d'un long processus d'élaboration théorique, initié à la fin du XIXe siècle.

L'origine de la boîte remonte à Francis Edgeworth, qui l'introduit en 1881 dans son ouvrage *Mathematical Psychics* [Edgeworth, 1881]. Son objectif est précis : comprendre pourquoi l'échange entre deux agents est indéterminé, alors que l'équilibre concurrentiel semble déterminé.

Edgeworth montre trois résultats fondamentaux :

- les allocations finales doivent appartenir à la courbe des contrats ;
- dans un échange bilatéral, toute allocation de cette courbe est possible ;
- lorsque le nombre d'agents augmente, cet ensemble se réduit.

Ce dernier résultat est particulièrement profond. Edgeworth établit que le noyau de l'économie — c'est-à-dire l'ensemble des allocations non bloquées par des coalitions d'agents — se contracte à mesure que le nombre d'agents augmente, jusqu'à se réduire à l'équilibre concurrentiel.

Ainsi, la concurrence parfaite apparaît comme une limite d'un processus de marchandage.

Par la suite, plusieurs économistes ont enrichi l'analyse :

- Pareto (1909) [Pareto, 1906] introduit le critère d'efficacité qui porte son nom ;
- Bowley (1924) [Bowley, 1924] formalise la notion de locus de marchandage ;
- Scitovsky (1941) [Scitovsky, 1941] utilise la boîte pour analyser les critères de bien-être ;
- Leontief (1946) [Leontief, 1946] clarifie et systématise son usage ;
- Arrow (1951) [Arrow, 1951] et Samuelson (1952) [Samuelson, 1952] l'intègrent dans la théorie moderne de l'équilibre général.

La boîte d'Edgeworth a ainsi servi de support à certaines des avancées les plus importantes de la théorie économique, notamment les deux théorèmes fondamentaux du bien-être.

Son succès tient à une propriété remarquable : elle permet de représenter, dans un cadre géométrique simple, des interactions complexes entre préférences, ressources et prix. Comme le souligne la littérature, elle peut illustrer simultanément un grand nombre de variables économiques.

Au-delà de son rôle pédagogique, la boîte d'Edgeworth révèle une idée essentielle :

*la coordination économique n'est pas donnée d'emblée ; elle émerge sous certaines conditions institutionnelles.*

Elle montre ainsi à la fois :

- la puissance du mécanisme des prix ;
- et ses conditions de validité.

En ce sens, elle constitue l'un des outils les plus profonds de la microéconomie.

Cette conjecture a été démontrée rigoureusement au XX<sup>e</sup> siècle, notamment par Debreu et Scarf (1963) [Debreu and Scarf, 1963] : lorsque l'économie est répliquée un grand nombre de fois, le noyau se réduit et converge vers l'ensemble des équilibres walrasiens.

#### 4.3.5. Marchandage et indétermination

La boîte met donc en évidence une propriété fondamentale :

*en l'absence de mécanisme de prix concurrentiels, l'équilibre est indéterminé.*

Dans un échange bilatéral :

- toute allocation du noyau est possible ;
- le résultat dépend du pouvoir de négociation des agents.

Cette indétermination est au cœur des analyses du marchandage.

#### 4.3.6. Rôle du nombre d'agents

Un résultat remarquable, dû à Edgeworth, est le suivant :

*lorsque le nombre d'agents augmente, le noyau se réduit.*

Intuition :

- avec peu d'agents, chacun a un pouvoir de négociation important ;
- avec beaucoup d'agents, la concurrence limite ce pouvoir.

À la limite :

- le noyau converge vers un point unique ;
- ce point est l'équilibre walrasien.

#### 4.3.7. Prix et équilibre concurrentiel

Introduisons un système de prix.

Une allocation est un équilibre concurrentiel si :

- chaque agent maximise son utilité ;
- les marchés sont équilibrés.

Graphiquement :

- la droite de prix passe par la dotation initiale ;
- elle est tangente aux courbes d'indifférence ;
- elle coupe la courbe des contrats.

**Conclusion.** Le système de prix sélectionne un point particulier du noyau.

Il fournit ainsi un mécanisme de coordination qui lève l'indétermination du marchandage.

### 4.4. L'équilibre général concurrentiel

Nous pouvons maintenant formaliser la notion d'équilibre général dans une économie d'échange.

#### 4.4.1. Définition de l'équilibre walrasien

Un *équilibre général concurrentiel* est constitué :

— d'un vecteur de prix  $p \in \mathbb{R}_+^L$  ;

— d'une allocation  $(x_1, \dots, x_I)$  ;

tels que :

(i) **Optimalité individuelle :**

$$x_i \in \arg \max \{u_i(x_i) \mid p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\}$$

(ii) **Équilibre des marchés :**

$$\sum_{i=1}^I x_i = \sum_{i=1}^I \omega_i.$$

#### 4.4.2. Condition d'optimalité : égalité des TMS

Dans le cas de deux biens, pour chaque agent  $i$  :

$$TMS_i = \frac{p_1}{p_2}.$$

À l'équilibre :

$$TMS_1 = TMS_2 = \dots = \frac{p_1}{p_2}.$$

**Interprétation.** Les taux d'échange subjectifs sont alignés sur les prix du marché.

#### 4.4.3. Absence d'illusion monétaire

Les demandes ne dépendent que des prix relatifs.

Si tous les prix sont multipliés par un même facteur  $\lambda > 0$ , alors :

— les contraintes budgétaires sont inchangées ;

— les choix des agents sont inchangés.

**Conclusion.** Seuls les prix relatifs comptent.

#### 4.4.4. La loi de Walras

**Énoncé.** Pour tout vecteur de prix  $p$  :

$$\sum_{l=1}^L p_l \left( \sum_{i=1}^I x_i^l - \sum_{i=1}^I \omega_i^l \right) = 0.$$

Autrement dit, la valeur des demandes excédentaires est nulle.

#### 4.4.5. Démonstration

Pour chaque agent :

$$p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i.$$

À l'optimum, sous monotonie :

$$p \cdot x_i = p \cdot \omega_i.$$

En sommant sur tous les agents :

$$\sum_i p \cdot x_i = \sum_i p \cdot \omega_i.$$

Donc :

$$p \cdot \left( \sum_i x_i - \sum_i \omega_i \right) = 0.$$

#### 4.4.6. Conséquences de la loi de Walras

##### Nombre de marchés indépendants

S'il y a  $L$  marchés et que  $L - 1$  sont à l'équilibre, alors le dernier l'est aussi.

**Preuve.** Si tous les excès de demande sauf un sont nuls, alors la loi de Walras impose que le dernier est nul.

**Conclusion.** Il suffit de considérer  $L - 1$  marchés.

##### Engorgement général, monnaie et loi de Walras

Une des premières controverses de la théorie économique fut celle sur la possibilité d'un engorgement général, bref la possibilité qu'il y ait une offre excédentaire sur les tous les marchés, d'avoir à la fois du chômage sur le marché du travail, des producteurs n'arrivant pas à écouler leurs productions, des émissions de titres qui n'arrivent pas à se placer, etc. Le débat scinda les économistes classiques : la majorité des économistes classiques (Ricardo, Say, Mill (père)) conclut à l'impossibilité d'un tel engorgement général, la minorité (Malthus) à sa possibilité. Mais il fallut attendre la loi de Walras pour que le débat prennent fin.

La loi de Walras a une implication en effet souvent mal comprise concernant la possibilité d'un « engorgement général » de l'économie. Cela se déroule en deux étapes. La première est succincte :

**Résultat fondamental.** Il est impossible d'avoir simultanément un excès d'offre sur tous les marchés.

En effet, si l'on note  $z_l$  l'excès de demande sur le marché  $l$ , la loi de Walras impose :

$$\sum_l p_l z_l = 0.$$

Si  $z_l < 0$  pour tout  $l$ , alors :

$$\sum_l p_l z_l < 0,$$

ce qui est impossible.

**Mais ce résultat appelle une interprétation plus fine.** Et c'est la deuxième étape de l'application de la loi de Walras au problème de l'engorgement général.

### Le rôle de la monnaie

Dans une économie réelle, il est nécessaire d'introduire explicitement la monnaie comme un bien particulier.

On considère alors une économie avec quatre marchés :

- le marché des biens ;
- le marché du travail ;
- le marché des titres ;
- le marché de la monnaie.

Dans ce cadre, la loi de Walras s'écrit :

$$p_B z_B + w z_L + p_T z_T + z_M = 0,$$

où  $z_M$  désigne la demande nette de monnaie.

### Interprétation macroéconomique

On peut alors observer la configuration suivante :

- excès d'offre sur le marché du travail (chômage) :  $z_L < 0$  ;
- excès d'offre sur le marché des biens (invendus) :  $z_B < 0$  ;
- excès d'offre sur le marché des titres :  $z_T < 0$  ;

Ces déséquilibres sont nécessairement compensés par :

$$z_M > 0,$$

c'est-à-dire une demande nette de monnaie.

**Conclusion.** Ce que l'on appelle un « engorgement général » des marchés réels correspond en réalité à une *demande excédentaire de monnaie*.

### Lecture classique

Cette idée remonte aux économistes classiques, notamment John Stuart Mill [Mill, 1844]. Vers 1829-1830, dans un essai intitulé « Of the Influence of Consumption on Production », il est sans doute le premier à comprendre que l'offre nette sur les marchés des biens et du travail à une demande de thésaurisation, à une demande nette de monnaie. Déjà les crises généralisées ne sont pas des crises de surproduction absolue, mais des déséquilibres liés à la détention de monnaie.

Elle sera reformulée de manière rigoureuse par Lange (1942) [Lange, 1942b], qui montre que la loi de Walras peut être interprétée comme une version généralisée de la loi de Say lorsque la monnaie est introduite comme un bien.

### Interprétation économique

- L'excès d'offre généralisé dans l'économie réelle signifie que :
- les agents souhaitent vendre des biens, du travail ou des titres ;
  - mais ne souhaitent pas acheter d'autres biens en contrepartie ;
  - ils souhaitent détenir de la monnaie.

Il s'agit donc d'un phénomène de *thésaurisation*.

### Conclusion générale.

*Un engorgement généralisé des marchés réels est l'expression d'un excès de demande de monnaie.*

Ce résultat permet de réconcilier :

- la loi de Walras (identité comptable) ;
- et la possibilité de déséquilibres macroéconomiques.

#### 4.4.7. Exercice type

Considérons une économie avec deux biens et deux agents :

$$u_1(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad \omega_1 = (2, 1)$$

$$u_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad \omega_2 = (1, 2)$$

#### Questions :

- déterminer les demandes ;
- calculer les excès de demande ;
- trouver l'équilibre.

#### 4.4.8. Méthode de résolution

- Normaliser un prix (par exemple  $p_2 = 1$ ).
- Calculer les revenus :  $R_i = p \cdot \omega_i$ .
- Déterminer les demandes individuelles.
- Calculer l'excès de demande.
- Résoudre  $z_1(p) = 0$ .

#### 4.4.9. Conclusion

L'équilibre général repose sur trois éléments fondamentaux :

- l'optimisation individuelle ;

- les prix comme signaux ;
- la cohérence globale assurée par la loi de Walras.

Il constitue ainsi une formalisation précise du mécanisme de coordination par les marchés.

## Annexe : Réplication, noyau et convergence vers l'équilibre walrasien

### 4.4.10. Introduction

Cette annexe propose une présentation du mécanisme par lequel le noyau d'une économie d'échange se réduit lorsque le nombre d'agents augmente, jusqu'à converger vers l'ensemble des allocations walrasiennes.

Nous nous plaçons dans le cadre simple d'une économie à deux biens et deux types d'agents, que l'on réplique. L'objectif n'est pas de reproduire le théorème général de Debreu et Scarf [Debreu and Scarf, 1963], mais d'en exposer le raisonnement dans un cadre accessible.

### 4.4.11. L'économie initiale

Considérons une économie avec deux agents,  $A$  et  $B$ , caractérisés par :

- des préférences continues, monotones et convexes ;
- des dotations initiales  $\omega_A$  et  $\omega_B$ .

On note  $\bar{\omega} = \omega_A + \omega_B$  la dotation totale.

Le noyau de cette économie est l'ensemble des allocations réalisables qui ne peuvent être bloquées par une coalition (ici, nécessairement l'ensemble des deux agents).

Dans ce cas simple, le noyau est un segment de la courbe des contrats.

## 4.5. Réplication de l'économie

On construit maintenant une économie répliquée.

Pour un entier  $n \geq 1$ , l'économie répliquée comporte :

- $n$  copies de l'agent  $A$  ;
- $n$  copies de l'agent  $B$ .

Chaque copie possède :

- les mêmes préférences que l'agent d'origine ;
- la même dotation initiale.

La dotation totale devient :

$$\bar{\omega}^n = n\omega_A + n\omega_B.$$

Une allocation est dite *symétrique* si tous les agents d'un même type consomment le même panier.

### 4.5.1. Le noyau dans l'économie répliquée

Une allocation appartient au noyau si aucune coalition d'agents ne peut :

- redistribuer ses propres ressources ;
- améliorer strictement la situation de tous ses membres.

Lorsque le nombre d'agents augmente, les coalitions possibles deviennent plus nombreuses et plus flexibles.

**Idée centrale.** Plus il y a d'agents, plus il est facile de former une coalition capable de reproduire, à son échelle, une allocation jugée préférable.

### 4.5.2. Fragilité des allocations non walrasiennes

Considérons une allocation symétrique qui n'est pas une allocation walrasienne.

Alors, il existe un vecteur de prix  $p$  tel que les taux marginaux de substitution ne sont pas alignés avec ces prix.

Cela implique qu'il existe un échange mutuellement avantageux entre certains agents.

**Construction d'une coalition bloquante.**

Dans l'économie répliquée :

- on peut sélectionner un sous-ensemble d'agents de type  $A$  et  $B$  ;
- organiser entre eux un échange améliorant leur situation ;
- sans dépasser leurs ressources totales.

Lorsque  $n$  est grand, il est possible d'ajuster très finement la composition de cette coalition.

**Conclusion.** Toute allocation non walrasienne peut être bloquée lorsque  $n$  est suffisamment grand.

### 4.5.3. Convergence du noyau

On peut alors énoncer le résultat central.

**Proposition (version simplifiée du théorème de Debreu-Scarff).** Dans les économies répliquées, le noyau se contracte lorsque  $n$  augmente, et sa limite coïncide avec l'ensemble des allocations walrasiennes.

#### Démonstration (esquisse)

**Étape 1 :** Toute allocation walrasienne appartient au noyau.

En effet, si une coalition pouvait améliorer la situation de ses membres, cela contredirait l'optimalité des choix individuels aux prix d'équilibre.

**Étape 2 :** Toute allocation non walrasienne est bloquée pour  $n$  suffisamment grand.

Comme montré précédemment, il existe une amélioration possible. La réplication permet de constituer une coalition réalisant cette amélioration.

**Étape 3 :** Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , seules subsistent les allocations walrasiennes.

## **Interprétation**

Ce résultat peut être interprété de la manière suivante :

- dans une petite économie, le marchandage est indéterminé ;
- dans une grande économie, la concurrence limite le pouvoir individuel ;
- les prix émergent comme mécanisme de coordination.

Ainsi, l'équilibre walrasien apparaît comme la limite d'un processus de négociation lorsque le nombre d'agents devient grand.

### **4.5.4. Conclusion**

La réplique de l'économie permet de relier deux concepts fondamentaux :

- le noyau, issu de la théorie du marchandage ;
- l'équilibre walrasien, issu de la théorie des marchés.

Elle montre que, dans certaines conditions, ces deux approches convergent.

Ce résultat constitue l'une des justifications les plus profondes du modèle concurrentiel.

# Chapitre 5

## Optimum de Pareto et courbe des contrats

### 5.1. Introduction

L'analyse de l'équilibre général a permis de montrer comment un système de prix peut coordonner les décisions individuelles d'agents décentralisés. Dans ce cadre, un équilibre concurrentiel apparaît comme une configuration dans laquelle les marchés sont simultanément équilibrés et les agents maximisent leur utilité.

Toutefois, une question essentielle demeure : un tel état est-il souhaitable ?

Autrement dit, la coordination assurée par les marchés conduit-elle à une utilisation « efficace » des ressources de l'économie ?

Répondre à cette question suppose d'introduire un critère d'évaluation des allocations. La microéconomie retient, à cet effet, un critère particulièrement sobre : le critère de Pareto.

Une allocation est dite meilleure qu'une autre au sens de Pareto si elle améliore la situation d'au moins un agent sans détériorer celle des autres. Une allocation est dite optimale si aucune amélioration de ce type n'est possible.

Ce critère présente une caractéristique essentielle : il ne repose sur aucune comparaison interpersonnelle des utilités. Il se contente de comparer des situations en termes d'améliorations possibles.

Dans le cadre de l'économie d'échange étudiée au chapitre précédent, ce critère permet de caractériser un ensemble d'allocations efficaces, représentées graphiquement par la courbe des contrats dans la boîte d'Edgeworth.

Ce chapitre poursuit trois objectifs :

- définir rigoureusement le critère de Pareto ;
- caractériser les allocations efficaces dans une économie d'échange ;
- établir le lien entre équilibre concurrentiel et efficacité.

Il constitue ainsi une étape essentielle vers les théorèmes fondamentaux du bien-être, qui feront l'objet du chapitre suivant.

## 5.2. Le critère de Pareto

L'évaluation des allocations économiques suppose de disposer d'un critère permettant de comparer différentes situations.

La microéconomie retient un critère particulièrement sobre : le critère de Pareto, qui repose uniquement sur les préférences individuelles.

### 5.2.1. Amélioration au sens de Pareto

**Définition.** Soient deux allocations  $(x_1, \dots, x_I)$  et  $(y_1, \dots, y_I)$ .

On dit que  $(x_1, \dots, x_I)$  est une *amélioration au sens de Pareto* de  $(y_1, \dots, y_I)$  si :

- pour tout agent  $i$ ,  $x_i \succeq_i y_i$  ;
- et pour au moins un agent  $j$ ,  $x_j \succ_j y_j$ .

**Interprétation.** On améliore la situation d'au moins un agent sans détériorer celle des autres.

### 5.2.2. Relation d'ordre partiel

Le critère de Pareto définit une relation de comparaison entre allocations.

Cependant, cette relation est *incomplète* :

- certaines allocations ne peuvent pas être comparées ;
- il peut exister des gains pour certains agents et des pertes pour d'autres.

**Conclusion.** Le critère de Pareto ne permet pas de classer toutes les allocations.

### 5.2.3. Optimum de Pareto

**Définition.** Une allocation  $(x_1, \dots, x_I)$  est un *optimum de Pareto* s'il n'existe aucune autre allocation réalisable qui constitue une amélioration au sens de Pareto.

Autrement dit, il est impossible d'améliorer la situation d'un agent sans détériorer celle d'un autre.

### 5.2.4. Exemples

#### Exemple 1 : amélioration évidente

Considérons deux agents et un bien.

Allocation initiale :

$$(1, 1)$$

Nouvelle allocation :

$$(2, 1)$$

Le premier agent est strictement mieux loti, le second est inchangé.

Il s'agit d'une amélioration de Pareto.

## Exemple 2 : non comparabilité

Allocation 1 :

(2, 1)

Allocation 2 :

(1, 2)

Le premier agent préfère la première allocation, le second préfère la seconde.

**Conclusion.** Les deux allocations ne sont pas comparables au sens de Pareto.

### 5.2.5. Propriétés du critère de Pareto

Le critère de Pareto présente plusieurs propriétés importantes :

- il repose uniquement sur les préférences individuelles ;
- il ne nécessite aucune comparaison interpersonnelle des utilités ;
- il est compatible avec une approche strictement ordinale.

**Mais il présente également des limites importantes.**

- il ne permet pas de départager des situations impliquant des gains et des pertes ;
- il ignore les questions de répartition ;
- il peut considérer comme optimales des situations très inégalitaires.

### 5.2.6. Interprétation économique

Le critère de Pareto doit être interprété comme un critère minimal :

*une allocation est inefficace si l'on peut améliorer la situation de quelqu'un sans nuire à personne.*

Il ne dit rien, en revanche, sur la justice ou l'équité des allocations.

**Interprétation.** Une allocation inefficace laisse subsister des possibilités d'échanges mutuellement avantageux entre les agents.

**Interprétation.** Une allocation inefficace laisse subsister des possibilités d'échanges mutuellement avantageux entre les agents.

### 5.2.7. Conclusion

Le critère de Pareto fournit une notion d'efficacité économique indépendante de toute considération distributive.

Il permet d'identifier un ensemble d'allocations efficaces, qui seront caractérisées dans le cadre de l'économie d'échange à l'aide de la courbe des contrats.

### 5.3. Caractérisation des optima de Pareto dans l'économie d'échange

Dans le cas d'une économie d'échange à deux agents et deux biens, le critère de Pareto peut être caractérisé de manière particulièrement simple.

L'idée fondamentale est la suivante : tant que les deux agents n'évaluent pas de la même manière le taux auquel un bien peut être échangé contre l'autre, il est possible de réallouer les biens de manière à dégager un surplus.

#### 5.3.1. Condition d'efficacité

Considérons deux agents, notés  $A$  et  $B$ , consommant deux biens 1 et 2.

Soit une allocation donnée. Supposons que les préférences soient régulières et que l'on se place dans le cas intérieur.

Une condition nécessaire d'efficacité de Pareto est :

$$TMS_{1,2}^A = TMS_{1,2}^B.$$

**Interprétation.** Les deux agents doivent avoir la même évaluation marginale du bien 1 en termes du bien 2.

Si ce n'est pas le cas, alors il existe une possibilité d'échange mutuellement avantageux.

#### 5.3.2. Raisonnement marginaliste

Supposons :

$$TMS_{1,2}^A > TMS_{1,2}^B.$$

Cela signifie que l'agent  $A$  est prêt à céder davantage du bien 2 pour obtenir une unité supplémentaire du bien 1 que ne l'exige l'agent  $B$  pour abandonner cette même unité.

Autrement dit :

- le bien 1 est relativement plus précieux pour  $A$  que pour  $B$  ;
- il est donc possible de transférer un peu du bien 1 de  $B$  vers  $A$  ;
- en compensant  $B$  par une quantité appropriée du bien 2.

Ce transfert peut être choisi :

- de manière à maintenir l'utilité de  $A$  constante ;
- ou celle de  $B$  constante ;
- tout en dégagant un surplus de bien 2 ou de bien 1.

C'est précisément ce surplus qui montre l'inefficacité de l'allocation initiale.

#### 5.3.3. Tableau des réarrangements marginaux

Supposons que l'on augmente la consommation de bien 1 de l'agent  $A$  d'une quantité  $dx_1 > 0$ .

Pour maintenir l'utilité de  $A$  constante, il faut diminuer sa consommation de bien 2 de :

$$dx_2^A = -TMS_{1,2}^A dx_1.$$

De son côté, pour que l'agent  $B$  accepte de céder cette quantité  $dx_1$  de bien 1, il suffit de lui donner une quantité de bien 2 égale à :

$$dx_2^B = TMS_{1,2}^B dx_1.$$

On obtient alors le tableau suivant.

	Variation du bien 1	Variation du bien 2	Interprétation
Agent $A$	$+dx_1$	$-TMS_{1,2}^A dx_1$	Utilité de $A$ constante
Agent $B$	$-dx_1$	$+TMS_{1,2}^B dx_1$	Compensation minimale de $B$
Surplus total	0	$(TMS_{1,2}^A - TMS_{1,2}^B) dx_1$	Gain disponible

Si :

$$TMS_{1,2}^A > TMS_{1,2}^B,$$

alors le surplus est strictement positif.

Ce surplus peut être redistribué de manière à améliorer au moins un agent sans détériorer l'autre.

#### 5.3.4. Exemple numérique

Supposons :

$$TMS_{1,2}^A = 3, \quad TMS_{1,2}^B = 1.$$

On transfère une unité du bien 1 de  $B$  vers  $A$ .

Pour maintenir l'utilité de  $A$  constante, il faut lui retirer 3 unités du bien 2.

Mais pour que  $B$  accepte de céder cette unité, il suffit de lui donner 1 unité du bien 2.

Le tableau devient :

	Variation du bien 1	Variation du bien 2
Agent $A$	+1	-3
Agent $B$	-1	+1
Surplus total	0	+2

Il apparaît donc un surplus de 2 unités du bien 2.

Ce surplus peut être redistribué entre les deux agents, ce qui montre que l'allocation initiale n'était pas optimale au sens de Pareto.

### 5.3.5. Conclusion

Le raisonnement marginaliste conduit à une conclusion simple :

*si les taux marginaux de substitution diffèrent, alors l'allocation n'est pas Pareto-efficace.*

La condition :

$$TMS_{1,2}^A = TMS_{1,2}^B$$

exprime donc l'absence de tout réarrangement marginal mutuellement avantageux.

Dans la boîte d'Edgeworth, cette condition caractérise les points de tangence des courbes d'indifférence, c'est-à-dire la courbe des contrats.

## 5.4. Courbe des contrats et représentation géométrique de l'efficacité

La caractérisation des optima de Pareto obtenue précédemment admet une représentation géométrique particulièrement simple dans la boîte d'Edgeworth.

### 5.4.1. Rappel : la boîte d'Edgeworth

On considère une économie à deux agents  $A$  et  $B$  et deux biens.

Chaque point de la boîte représente une allocation réalisable.

Les préférences des agents sont représentées par leurs courbes d'indifférence :

- celles de  $A$  sont définies à partir de l'origine en bas à gauche ;
- celles de  $B$  à partir de l'origine en haut à droite.

### 5.4.2. Tangence et efficacité

Une allocation est Pareto-efficace si et seulement si les courbes d'indifférence des deux agents sont tangentes en ce point.

Autrement dit :

$$TMS_{1,2}^A = TMS_{1,2}^B.$$

**Interprétation.** Au point de tangence, il n'est plus possible de réallouer les biens sans détériorer la situation d'au moins un agent.

### 5.4.3. La courbe des contrats

**Définition.** La courbe des contrats est l'ensemble des allocations Pareto-efficaces.

Elle est constituée de tous les points de tangence des courbes d'indifférence des deux agents.

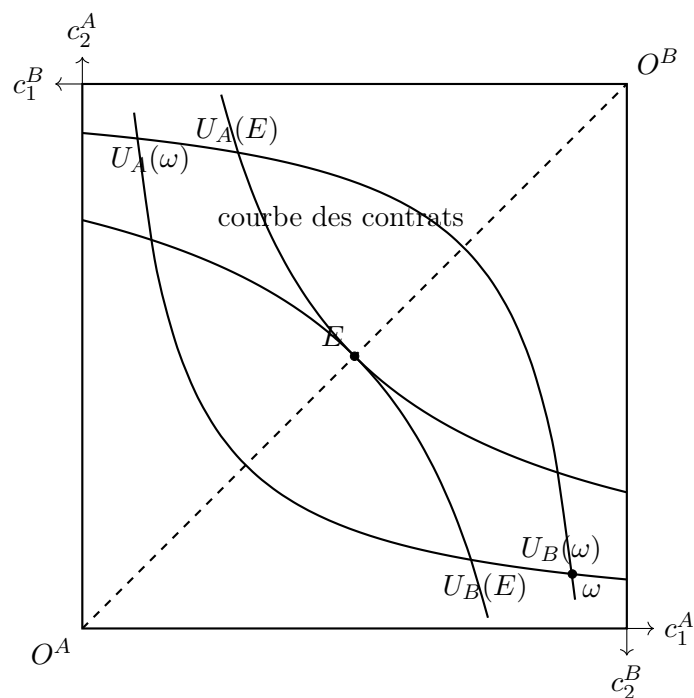


FIGURE 5.1 – Courbe des contrats dans la boîte d'Edgeworth

#### 5.4.4. Lien avec le raisonnement marginaliste

Le résultat géométrique prolonge directement le raisonnement marginaliste :

- si les courbes d'indifférence se coupent, alors les TMS diffèrent ;
- il existe alors un réarrangement marginal permettant de dégager un surplus ;
- ce surplus peut être redistribué : l'allocation n'est pas efficace.

**Conclusion.** Les points de tangence sont exactement ceux où tout réarrangement marginal est impossible.

#### 5.4.5. Propriétés de la courbe des contrats

- elle est généralement décroissante ;
- elle traverse l'intérieur de la boîte ;
- elle dépend des préférences des agents.

Dans certains cas particuliers :

- elle peut coïncider avec la diagonale (préférences identiques) ;
- elle peut être réduite à un point (préférences très différentes).

#### 5.4.6. Lien avec le noyau

La courbe des contrats contient toutes les allocations efficaces.

Le noyau, introduit au chapitre précédent, est un sous-ensemble de cette courbe :

- il dépend de la dotation initiale ;
- il contient les allocations Pareto-efficaces accessibles par échange volontaire.

### Conclusion.

- courbe des contrats : efficacité ;
- noyau : efficacité + acceptabilité individuelle.

#### 5.4.7. Conclusion

La courbe des contrats fournit une représentation complète des allocations efficaces dans une économie d'échange.

Elle permet de relier directement :

- les préférences individuelles ;
- les conditions marginales ;
- et l'efficacité collective.

La section suivante examinera le lien entre ces allocations efficaces et les équilibres concurrentiels.

### 5.5. Équilibre concurrentiel et optimum de Pareto

Nous avons caractérisé les allocations Pareto-efficaces et montré qu'elles correspondent aux points de tangence des courbes d'indifférence dans la boîte d'Edgeworth.

Nous examinons maintenant le lien entre ces allocations et l'équilibre concurrentiel.

#### 5.5.1. Résultat fondamental

**Proposition.** Sous des hypothèses standard (préférences continues, monotones et convexes), toute allocation d'équilibre concurrentiel est Pareto-efficace.

Ce résultat est connu sous le nom de *premier théorème du bien-être*.

#### 5.5.2. Intuition

À l'équilibre concurrentiel :

- chaque agent maximise son utilité sous contrainte budgétaire ;
- tous les agents font face aux mêmes prix ;
- les marchés sont équilibrés.

La maximisation individuelle implique que, pour chaque agent  $i$  :

$$TMS_{1,2}^i = \frac{p_1}{p_2}.$$

Donc :

$$TMS_{1,2}^A = TMS_{1,2}^B.$$

La condition d'efficacité est donc satisfaite.

### 5.5.3. Démonstration (raisonnement par l'absurde)

Supposons qu'une allocation d'équilibre ne soit pas Pareto-efficace.

Alors, d'après le corollaire établi précédemment, il existe une réallocation réalisable qui améliore strictement la situation d'au moins un agent sans détériorer celle des autres.

Cette réallocation correspond à un ensemble d'échanges mutuellement avantageux.

**Mais cela est impossible à l'équilibre.**

En effet :

- chaque agent a déjà choisi le meilleur panier accessible compte tenu des prix ;
- aucun échange supplémentaire ne peut améliorer sa situation sans violer la contrainte budgétaire.

On obtient une contradiction.

**Conclusion.** L'allocation d'équilibre est Pareto-efficace.

### 5.5.4. Interprétation économique

Le résultat peut être interprété de la manière suivante :

*le système de prix concurrentiels élimine toutes les possibilités d'échanges mutuellement avantageux.*

Autrement dit :

- si des gains à l'échange existaient encore ;
- les agents les exploiteraient ;
- et l'on ne serait pas à l'équilibre.

**Conclusion.** À l'équilibre, toutes les opportunités d'amélioration de Pareto ont été épuisées.

### 5.5.5. Lecture géométrique

Dans la boîte d'Edgeworth :

- la droite de prix passe par la dotation initiale ;
- les agents choisissent leur point optimal sur cette droite ;
- ce point est un point de tangence des courbes d'indifférence.

Il appartient donc à la courbe des contrats.

### 5.5.6. Remarque importante

Le premier théorème du bien-être ne dit pas que :

- l'équilibre est unique ;
- l'allocation est équitable ;
- ou qu'elle maximise une notion globale de bien-être.

Il affirme uniquement que :

- aucune amélioration de Pareto n'est possible.

### 5.5.7. Limites

Ce résultat repose sur des hypothèses fortes :

- concurrence parfaite ;
- absence d'externalités ;
- information parfaite ;
- marchés complets.

Lorsque ces hypothèses ne sont pas satisfaites, l'équilibre peut être inefficace.

### 5.5.8. Conclusion

Le premier théorème du bien-être établit un lien fondamental entre :

- la coordination par les marchés ;
- et l'efficacité économique.

Il fournit ainsi une justification analytique du rôle des prix comme mécanisme d'allocation des ressources.

La section suivante examinera la question inverse : toute allocation Pareto-efficace peut-elle être obtenue comme un équilibre concurrentiel ?

## 5.6. Le second théorème du bien-être

Le premier théorème du bien-être établit que tout équilibre concurrentiel est Pareto-efficace. La question inverse se pose alors naturellement :

*toute allocation Pareto-efficace peut-elle être obtenue comme un équilibre concurrentiel ?*

### 5.6.1. Énoncé du résultat

**Proposition (second théorème du bien-être).** Sous certaines conditions (notamment convexité des préférences), toute allocation Pareto-efficace peut être soutenue comme un équilibre concurrentiel, à condition de modifier de manière appropriée les dotations initiales.

Autrement dit, pour toute allocation efficace, il existe :

- un vecteur de prix  $p$  ;
- une redistribution des ressources initiales ;

tels que cette allocation soit issue d'un équilibre concurrentiel.

### 5.6.2. Intuition

Considérons une allocation Pareto-efficace donnée.

Par définition, elle appartient à la courbe des contrats :

$$TMS^A = TMS^B.$$

On peut alors tracer une droite de prix ayant cette pente :

$$\frac{p_1}{p_2} = TMS.$$

Si les dotations initiales sont choisies de manière à ce que cette allocation soit accessible pour chaque agent, alors :

- chaque agent maximise son utilité ;
- les choix sont compatibles avec les prix ;
- l'allocation est un équilibre.

### 5.6.3. Lecture géométrique

Dans la boîte d'Edgeworth de la figure 5.2, où la dotation est initialement au point  $\omega$  et l'équilibre au point  $E$ , pour mettre en oeuvre le 2ème théorème :

- on choisit le point  $E'$  que l'on souhaite obtenir sur la courbe des contrats ;
- on trace la tangente commune aux courbes d'indifférence ;
- on déplace la dotation initiale sur cette tangente en faisant le transfert  $T$  ;
- cette nouvelle dotation  $\omega'$  soutient l'allocation comme équilibre.

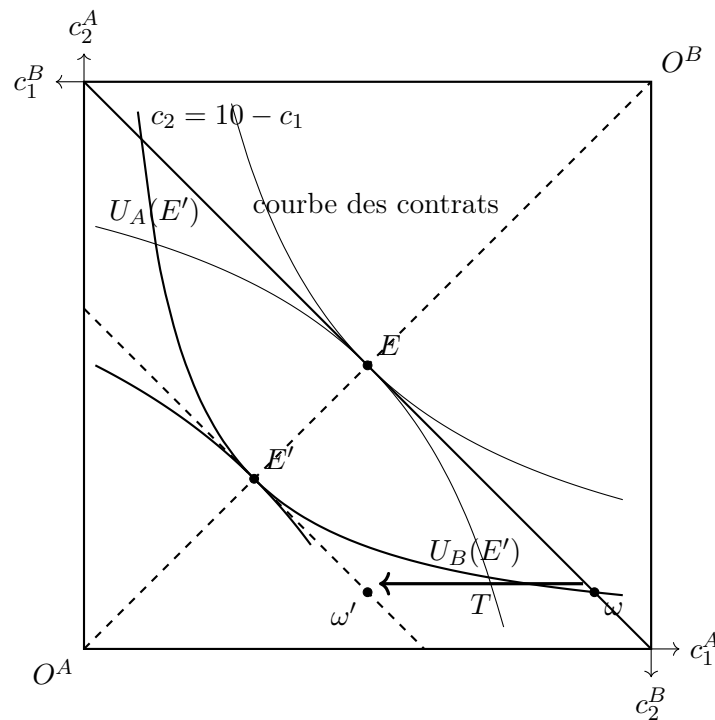


FIGURE 5.2 – Second théorème du bien-être : redistribution des dotations et nouvel équilibre

### 5.6.4. Rôle de la redistribution

Le résultat repose sur un point essentiel :

*les prix coordonnent, mais les dotations déterminent la répartition.*

Ainsi :

- les marchés assurent l'efficacité ;
- la redistribution permet de choisir parmi les allocations efficaces.

### 5.6.5. Interprétation économique

Le second théorème suggère une séparation des rôles :

- les pouvoirs publics peuvent intervenir sur les dotations (par exemple via des transferts) ;
- les marchés assurent ensuite une allocation efficace des ressources.

**Conclusion.** Efficacité et équité peuvent, en principe, être traitées séparément.

### 5.6.6. Limites du résultat

Le second théorème repose sur des hypothèses fortes :

- convexité des préférences ;
- absence d'indivisibilités ;
- possibilité de transferts forfaitaires (non distorsifs).

En pratique :

- les transferts peuvent être difficiles à mettre en œuvre ;
- les politiques redistributives peuvent affecter les incitations ;
- certaines allocations efficaces ne peuvent pas être décentralisées.

### 5.6.7. Lien avec le premier théorème

Les deux théorèmes du bien-être peuvent être résumés ainsi :

- Premier théorème : équilibre  $\Rightarrow$  efficacité ;
- Second théorème : efficacité  $\Rightarrow$  équilibre (avec redistribution).

### 5.6.8. Conclusion

Le second théorème du bien-être complète le premier en montrant que les mécanismes de marché peuvent, en principe, réaliser toute allocation efficace, sous réserve d'une redistribution appropriée des ressources.

Il met ainsi en évidence le rôle central des institutions et des politiques redistributives dans le fonctionnement des économies de marché.

### **Encadré : Le 2e théorème du bien-être ... et la construction du socialisme**

Le second théorème du bien-être peut, à première vue, apparaître comme un résultat purement abstrait. Pourtant, il s'inscrit dans un contexte historique et intellectuel précis : celui des débats sur la possibilité d'une organisation socialiste de l'économie. Implicitement Lange y mobilisa l'intuition du 2eme théorème qu'il ne devait démontrer que plus tard.

L'un des premiers économistes à proposer une démonstration rigoureuse de ce 2ème théorème fut en effet en 1942 Oskar Lange dans son article *The Foundations of Welfare Economics* [Lange, 1942a]. Oskar Lange (1904–1965) fut d'abord dans sa Pologne natale un économiste marxiste, avant de devenir l'un des plus brillants économistes néo-classiques à partir de 1934 au Royaume-Uni puis aux Etats-Unis. Il y fut l'un des plus brillants de la Cowles Commission des années 40. Durant son séjour américain, il fit de multiples apports à la science économique. Notamment en économie mathématique, en macroéconomie, en économétrie. Resté communiste, il fut ambassadeur aux Nations Unies à New York de la nouvelle Pologne communiste et en 1946 passa le rideau de fer d'Ouest en Est. Un cas extrêmement rare !

Oskar Lange fut l'un des principaux acteurs de la grande controverse des années 30 sur la possibilité de construire une économie socialiste. Un sujet d'actualité à l'époque.

#### **Le socialisme de marché**

La possibilité de construire une économie socialiste qui ne soit pas un chaos total avait été vigoureusement contestés notamment par des économistes comme Mises [von Mises, 1920] [von Mises, 1935] et Hayek [Hayek, 1935]. qui soutenaient l'impossibilité du calcul économique en régime socialiste, Lange [Lange, 1936] [Lange, 1937] [Lange and Taylor, 1938] a défendu la thèse suivante :

- une économie socialiste peut reproduire les résultats d'une économie de marché ;
- il suffit pour cela d'utiliser un système de prix ;
- ces prix peuvent être déterminés par un mécanisme d'ajustement ("trial and error") simulant la concurrence.

Dans cette vision :

- les entreprises publiques reçoivent des prix et maximisent leur profit ;
- une autorité centrale ajuste les prix pour équilibrer les marchés ;
- la répartition initiale des ressources est décidée politiquement.

Le second théorème du bien-être fournit alors une justification théorique à cette architecture institutionnelle.

#### **Une lecture « politique » du second théorème**

Le second théorème du bien-être suggère une idée simple mais puissante :

*une société peut choisir librement la répartition des ressources, puis laisser les marchés assurer l'efficacité.*

### Encadré : Le 2e théorème du bien-être ... et la construction du socialisme (suite et fin)

Autrement dit :

- la question de la justice sociale (répartition des ressources) peut être traitée séparément ;
- la question de l'allocation efficace peut être confiée aux mécanismes de marché.

Dans cette perspective, on peut reformuler le message du second théorème de manière volontairement provocatrice :

*« Vous souhaitez une répartition des ressources conforme à vos idéaux de justice ?  
Redistribuez les dotations initiales, puis laissez les marchés fonctionner. »*

### Mises en garde

Il convient toutefois de ne pas surestimer la portée du second théorème.

Plusieurs difficultés majeures sont ignorées dans ce cadre :

- **les incitations** : les agents (dirigeants d'entreprises, travailleurs, administrations) peuvent ne pas avoir intérêt à suivre les objectifs fixés ;
- **l'information** : la connaissance des préférences, des technologies et des contraintes est dispersée et difficile à centraliser ;
- **les transferts** : la redistribution initiale supposée dans le théorème est difficile à mettre en œuvre sans distorsions ;
- **la dynamique** : innovation, investissement et adaptation ne sont pas pleinement pris en compte.

La discussion du modèle proposé par Lange a conduit certains économistes, comme le futur Prix Nobel Friedrich von Hayek dans ses articles de 1937 à 1945 [Hayek, 1937] [Hayek, 1940] [Hayek, 1945], à étudier le rôle de l'information, de sa dispersion et de son asymétrie, dans le fonctionnement des systèmes économiques. A partir des années 70, ces premiers travaux ont été repris [Hurwicz, 1973] et ont conduit à une vaste littérature sur les mécanismes d'incitation qui forme aujourd'hui une partie essentielle de la microéconomie avancée, parfois qualifiée de théorie des contrats.

## Chapitre 6

# Équilibre général et optima de Pareto en économie de production

### 6.1. Introduction

Jusqu'à présent, l'analyse de l'équilibre général a été conduite dans le cadre d'une économie d'échange pure, c'est-à-dire une économie dans laquelle les ressources disponibles sont données et simplement redistribuées entre les agents.

Ce cadre a permis de mettre en évidence plusieurs résultats fondamentaux :

- l'existence d'un mécanisme de coordination par les prix ;
- la caractérisation des allocations efficaces au sens de Pareto ;
- et le lien entre équilibre concurrentiel et efficacité.

Toutefois, cette représentation reste profondément incomplète.

Dans les économies réelles, les biens ne sont pas seulement échangés : ils sont produits. Les ressources initiales ne constituent pas des données immuables ; elles sont transformées par l'activité productive.

Introduire la production dans l'analyse de l'équilibre général revient donc à enrichir considérablement le cadre précédent :

- les agents ne sont plus seulement des consommateurs, mais aussi des producteurs ;
- les ressources ne sont plus simplement redistribuées, mais transformées ;
- les contraintes technologiques viennent s'ajouter aux contraintes de ressources.

Ce passage de l'économie d'échange à l'économie de production modifie en profondeur la nature des conditions d'efficacité.

Dans une économie d'échange, l'efficacité est caractérisée par l'égalité des taux marginaux de substitution entre les agents :

$$TMS^A = TMS^B.$$

Dans une économie avec production, une nouvelle contrainte apparaît : la transformation des biens.

Les conditions d'efficacité doivent alors intégrer non seulement les préférences des agents, mais aussi les possibilités technologiques de transformation. Elles prennent la forme suivante :

$$TMS = TMT.$$

Autrement dit, le taux auquel les agents sont prêts à substituer les biens doit être égal au taux auquel ces biens peuvent être transformés dans la production.

Dans un équilibre concurrentiel, ces deux grandeurs sont elles-mêmes égales aux prix relatifs :

$$TMS = TMT = \frac{p_1}{p_2}.$$

Ce résultat constitue l'une des expressions les plus complètes du mécanisme de coordination par les prix.

Le présent chapitre poursuit trois objectifs :

- introduire la production dans le cadre de l'équilibre général ;
- caractériser les conditions d'efficacité dans ce nouveau cadre ;
- établir le lien entre équilibre concurrentiel et optimum de Pareto en présence de production.

Comme dans les chapitres précédents, l'analyse reposera sur un cadre volontairement simplifié :

- concurrence pure et parfaite ;
- absence d'incertitude ;
- technologies bien comportées.

Ces hypothèses permettent de mettre en évidence les mécanismes fondamentaux à l'œuvre, au prix d'une abstraction dont les limites devront être gardées à l'esprit.

Ce chapitre constitue ainsi l'aboutissement de l'analyse microéconomique développée dans ce document : il articule de manière cohérente les comportements des consommateurs, des producteurs et le fonctionnement des marchés.

## 6.2. Le cadre d'une économie avec production

Nous considérons désormais une économie dans laquelle les biens ne sont pas seulement échangés, mais également produits.

Cette économie comporte :

- des consommateurs ;
- des entreprises ;
- des marchés sur lesquels s'échangent biens et facteurs.

### 6.2.1. Les consommateurs

On considère un ensemble de consommateurs, indexés par  $i = 1, \dots, I$ .

Chaque consommateur est caractérisé par :

- une relation de préférence  $\succeq_i$  sur  $\mathbb{R}_+^L$ ;
- une dotation initiale en biens  $\omega_i$ ;
- éventuellement une dotation en facteurs (travail, capital).

Les préférences sont supposées :

- complètes;
- transitives;
- monotones.

Comme précédemment, elles peuvent être représentées par une fonction d'utilité  $u_i(x_i)$ .

### 6.2.2. Les entreprises

On considère un ensemble d'entreprises, indexées par  $j = 1, \dots, J$ .

Chaque entreprise est caractérisée par un ensemble de production :

$$Y_j \subset \mathbb{R}^L,$$

qui décrit les combinaisons techniquement réalisables d'inputs et d'outputs.

Un vecteur  $y_j \in Y_j$  représente un plan de production :

- ses composantes positives correspondent aux biens produits;
- ses composantes négatives correspondent aux facteurs utilisés.

L'entreprise choisit  $y_j$  de manière à maximiser son profit :

$$\pi_j = p \cdot y_j.$$

### 6.2.3. Propriété et revenus

Les entreprises appartiennent aux consommateurs.

On note  $\theta_{ij}$  la part de l'entreprise  $j$  détenue par le consommateur  $i$ , avec :

$$\sum_i \theta_{ij} = 1.$$

Le revenu du consommateur  $i$  est alors :

$$R_i = p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} \pi_j.$$

**Interprétation.** Les consommateurs tirent leurs ressources :

- de leurs dotations initiales;
- des profits des entreprises.

#### 6.2.4. Les choix des consommateurs

Chaque consommateur choisit un panier  $x_i$  qui maximise son utilité sous contrainte budgétaire :

$$p \cdot x_i \leq R_i.$$

#### 6.2.5. Les marchés

Les marchés portent sur :

- les biens de consommation ;
- les facteurs de production.

Les prix sont donnés par un vecteur :

$$p \in \mathbb{R}_+^L.$$

Comme précédemment, les agents prennent les prix comme des paramètres.

#### 6.2.6. Allocations réalisables

Une allocation est donnée par :

$$(x_1, \dots, x_I, y_1, \dots, y_J)$$

Elle est réalisable si :

$$\sum_{i=1}^I x_i = \sum_{i=1}^I \omega_i + \sum_{j=1}^J y_j.$$

**Interprétation.** La consommation totale est égale à la somme :

- des ressources initiales ;
- et de la production.

#### 6.2.7. Remarque

Par rapport à l'économie d'échange, deux éléments nouveaux apparaissent :

- les entreprises transforment les ressources ;
- les profits redistribuent les revenus.

Ces deux éléments modifient profondément la structure de l'équilibre.

#### 6.2.8. Conclusion

Le cadre d'une économie avec production combine :

- les décisions de consommation ;
- les décisions de production ;
- et leur coordination par les prix.

La section suivante définira la notion d'équilibre général dans ce cadre et en précisera les conditions.

### 6.3. Équilibre général avec production

Nous pouvons maintenant définir l'équilibre général dans une économie avec production, en intégrant simultanément les comportements des consommateurs et des entreprises.

#### 6.3.1. Définition de l'équilibre

Un *équilibre général concurrentiel avec production* est constitué :

- d'un vecteur de prix  $p \in \mathbb{R}_+^L$  ;
  - d'un ensemble de consommations  $(x_1, \dots, x_I)$  ;
  - d'un ensemble de plans de production  $(y_1, \dots, y_J)$  ;
- tels que :

(i) **Optimalité des consommateurs :**

$$x_i \in \arg \max \{u_i(x_i) \mid p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \pi_j\}$$

(ii) **Maximisation du profit :**

$$y_j \in \arg \max \{p \cdot y_j \mid y_j \in Y_j\}$$

(iii) **Équilibre des marchés :**

$$\sum_{i=1}^I x_i = \sum_{i=1}^I \omega_i + \sum_{j=1}^J y_j.$$

#### 6.3.2. Conditions marginalistes

Dans le cas de deux biens, ces conditions peuvent être interprétées de manière simple.

**Pour les consommateurs :**

$$TMS_{1,2}^i = \frac{p_1}{p_2}.$$

**Pour les entreprises :**

$$TMT_{1,2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

**Conclusion :**

$$TMS_{1,2}^i = TMT_{1,2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

#### 6.3.3. Interprétation économique

Cette égalité exprime une condition fondamentale d'efficacité :

*le taux auquel les consommateurs souhaitent échanger les biens est égal au taux auquel l'économie peut les transformer.*

Autrement dit :

- les préférences et la technologie sont parfaitement coordonnées ;
- aucune réallocation des ressources ou de la production ne peut améliorer la situation.

#### 6.3.4. Raisonement marginaliste

Supposons que :

$$TMS > TMT.$$

Cela signifie que :

- les consommateurs valorisent davantage le bien 1 ;
- mais la technologie permet de transformer le bien 2 en bien 1 à un coût plus faible.

Il est alors possible :

- de réallouer la production pour produire davantage de bien 1 ;
- et de redistribuer ce surplus ;
- de manière à améliorer la situation des agents.

**Corollaire.** Si  $TMS \neq TMT$ , alors il existe des réallocations de production et de consommation mutuellement avantageuses.

#### 6.3.5. Lecture géométrique

Dans le cas de deux biens, on peut représenter :

- la frontière des possibilités de production (FPP) ;
- les courbes d'indifférence des consommateurs.

L'équilibre correspond à un point où :

- la FPP est tangente à une courbe d'indifférence ;
- la pente commune est égale au rapport des prix.

#### 6.3.6. Rôle des prix

Les prix jouent un double rôle :

- ils guident les choix des consommateurs ;
- ils orientent les décisions de production.

**Conclusion.** Ils assurent la cohérence entre :

- les préférences ;
- les technologies ;
- et les ressources disponibles.

#### 6.3.7. Lien avec l'économie d'échange

L'économie d'échange apparaît comme un cas particulier :

- en l'absence de production,  $TMT$  disparaît ;
- la condition d'efficacité se réduit à :

$$TMS^A = TMS^B.$$

### 6.3.8. Conclusion

L'équilibre général avec production étend naturellement les résultats précédents :

- il intègre les décisions de production ;
- il relie préférences et technologies ;
- il fournit une condition complète d'efficacité économique.

La section suivante examinera les conditions d'optimalité de Pareto dans ce cadre et établira le lien avec l'équilibre concurrentiel.

## 6.4. Optimum de Pareto avec production

Nous cherchons à caractériser les allocations Pareto-efficaces dans une économie avec production.

Contrairement à l'économie d'échange, deux dimensions interviennent désormais :

- la répartition des biens entre les agents ;
- la manière dont ces biens sont produits.

### 6.4.1. Condition d'efficacité

Dans une économie à deux biens, une allocation est Pareto-efficace si et seulement si :

$$TMS_{1,2}^i = TMT_{1,2} \quad \text{pour tout } i.$$

**Interprétation.** Le taux auquel les consommateurs sont prêts à substituer les biens doit être égal au taux auquel ces biens peuvent être transformés dans la production.

### 6.4.2. Raisonnement marginaliste

Supposons que l'on se situe à une allocation donnée.

On considère une petite modification de la production :

- on augmente la production du bien 1 de  $dQ_1 > 0$  ;
- cela implique une diminution de la production du bien 2 de :

$$dQ_2 = -TMT_{1,2} dQ_1.$$

Cette variation correspond à un déplacement le long de la frontière des possibilités de production.

### 6.4.3. Redistribution aux consommateurs

La variation de production est ensuite redistribuée aux consommateurs.

On peut répartir  $dQ_1$  et  $dQ_2$  entre les agents de manière à analyser leurs effets sur le bien-être.

Considérons un agent représentatif pour simplifier l'exposition.

Pour maintenir son utilité constante, il faut compenser l'augmentation de  $dQ_1$  par une variation du bien 2 égale à :

$$dx_2 = -TMS_{1,2} dQ_1.$$

#### 6.4.4. Tableau des réarrangements marginaux

On obtient le tableau suivant :

	Variation du bien 1	Variation du bien 2	Interprétation
Production	$+dQ_1$	$-TMT dQ_1$	Transformation technique
Consommation (compensation)	$-dQ_1$	$+TMS dQ_1$	Utilité constante
Surplus total	0	$(TMS - TMT)dQ_1$	Gain disponible

#### 6.4.5. Interprétation

Si :

$$TMS > TMT,$$

alors :

- le surplus est positif ;
- il est possible d'augmenter le bien-être d'au moins un agent ;
- sans détériorer celui des autres.

**Corollaire.** Si  $TMS \neq TMT$ , alors il existe des réallocations de production et de consommation mutuellement avantageuses.

#### 6.4.6. Conclusion

On en déduit que la condition :

$$TMS = TMT$$

est nécessaire pour l'efficacité de Pareto.

Réciproquement, lorsque cette condition est vérifiée :

- aucun réarrangement marginal ne permet de dégager un surplus ;
- toute modification de la production ou de la répartition détériore la situation d'au moins un agent.

**Conclusion générale.**

*Une allocation est Pareto-efficace si et seulement si le taux marginal de substitution est égal au taux marginal de transformation.*

#### 6.4.7. Lecture géométrique

Graphiquement :

- la frontière des possibilités de production représente les contraintes technologiques ;

- les courbes d'indifférence représentent les préférences ;
- l'optimum correspond à un point de tangence entre les deux.

Ce point caractérise simultanément :

- l'efficacité dans la production ;
- et l'efficacité dans la consommation.

#### 6.4.8. Conclusion

Cette condition complète celle obtenue dans l'économie d'échange :

- échange pur :  $TMS^A = TMS^B$  ;
- avec production :  $TMS = TMT$ .

Elle constitue la forme la plus générale de l'efficacité économique dans le cadre de la microéconomie standard.

La section suivante établira que, sous certaines conditions, l'équilibre concurrentiel avec production satisfait cette propriété.

### 6.5. Équilibre concurrentiel et optimum de Pareto en économie de production

Nous avons caractérisé les allocations Pareto-efficaces dans une économie avec production par la condition :

$$TMS = TMT.$$

Nous montrons maintenant que cette condition est satisfaite à l'équilibre concurrentiel.

#### 6.5.1. Résultat fondamental

**Proposition.** Sous des hypothèses standard (concurrence parfaite, préférences convexes, technologies convexes), toute allocation d'équilibre concurrentiel avec production est Pareto-efficace.

Ce résultat constitue une extension du premier théorème du bien-être au cas d'une économie avec production.

#### 6.5.2. Intuition

À l'équilibre concurrentiel :

- les consommateurs maximisent leur utilité :

$$TMS_{1,2}^i = \frac{p_1}{p_2};$$

- les entreprises maximisent leur profit :

$$TMT_{1,2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

On obtient immédiatement :

$$TMS_{1,2}^i = TMT_{1,2}.$$

La condition d'efficacité est donc vérifiée.

### 6.5.3. Démonstration (raisonnement économique)

Supposons qu'une allocation d'équilibre ne soit pas Pareto-efficace.

D'après les résultats précédents, cela signifie que :

$$TMS \neq TMT.$$

**Corollaire.** Il existe alors une modification de la production et de la répartition permettant de dégager un surplus.

Autrement dit, il existe des réallocations mutuellement avantageuses.

Mais cela est incompatible avec l'équilibre concurrentiel :

- si  $TMS > \frac{p_1}{p_2}$ , les consommateurs souhaitent davantage de bien 1 ;
- si  $TMT < \frac{p_1}{p_2}$ , les entreprises peuvent produire ce bien à moindre coût ;
- ces incitations conduisent à une modification des productions et des consommations.

L'économie n'est donc pas à l'équilibre.

On obtient une contradiction.

**Conclusion.** Toute allocation d'équilibre concurrentiel est Pareto-efficace.

### 6.5.4. Lecture unifiée

Le résultat peut être résumé par la chaîne d'égalités suivante :

$$TMS_{1,2}^i = \frac{p_1}{p_2} = TMT_{1,2}.$$

Cette égalité exprime la cohérence complète du système économique :

- les préférences individuelles (demande) ;
  - les technologies (offre) ;
  - et les prix (marchés)
- sont parfaitement alignés.

### 6.5.5. Interprétation économique

Le système de prix joue ici un rôle central :

- il transmet l'information sur la rareté relative des biens ;
- il guide simultanément les décisions de consommation et de production ;
- il élimine toute possibilité de gains mutuels non exploités.

*À l'équilibre, il n'existe ni gaspillage dans la production, ni gains à l'échange inexploités.*

### 6.5.6. Remarques

Comme dans le cas de l'économie d'échange, ce résultat doit être interprété avec prudence.

Il ne garantit pas :

- l'équité de la répartition ;
- l'unicité de l'équilibre ;
- ni sa stabilité.

Il repose en outre sur des hypothèses exigeantes :

- concurrence parfaite ;
- absence d'externalités ;
- technologies convexes.

### 6.5.7. Conclusion

L'équilibre général avec production prolonge et complète les résultats obtenus dans l'économie d'échange :

- il assure l'efficacité dans la consommation ;
- il assure l'efficacité dans la production ;
- il coordonne ces deux dimensions par les prix.

Il constitue ainsi la forme la plus aboutie du modèle concurrentiel étudié dans ce document.

## 6.6. L'agent représentatif : agrégation et limites

### 6.6.1. Introduction : l'ambition d'agréger

L'analyse développée jusqu'à présent repose sur une description explicitement désagrégée de l'économie :

- une multiplicité de consommateurs, chacun doté de préférences propres ;
- une multiplicité d'entreprises, chacune caractérisée par sa technologie.

Cette description est conceptuellement riche, mais rapidement difficile à manier, notamment lorsque l'on cherche à analyser des phénomènes agrégés.

D'où une question naturelle :

*peut-on représenter une économie entière comme si elle était gouvernée par un seul agent ?*

Du côté de la production, la réponse est relativement bien comprise :

- sous certaines conditions (convexité, allocation efficace des facteurs),
- les technologies peuvent être agrégées en une unique frontière de transformation.

Du côté des consommateurs, la question est beaucoup plus délicate.

### 6.6.2. Le résultat de Negishi

Un résultat fondamental, dû à Negishi (1960) [Negishi, 1960], établit un lien profond entre équilibre concurrentiel et maximisation d'une fonction de bien-être social.

Plus précisément, Negishi montre qu'un équilibre concurrentiel peut être obtenu comme solution du problème :

$$\max_{(x_i, y_j)} \sum_i \alpha_i u_i(x_i)$$

sous les contraintes de ressources et de technologie.

Les poids  $\alpha_i$  ne sont pas arbitraires : ils sont liés aux conditions d'équilibre, en particulier aux utilités marginales du revenu :  $\alpha_i = \frac{p_i}{\sum_j p_j y_j}$ .

**Interprétation.** Un équilibre concurrentiel est un optimum de Pareto correspondant à une certaine pondération des individus.

Ce résultat suggère une lecture possible :

- l'économie se comporte comme si un planificateur maximisait une fonction de bien-être ;
- ou encore comme si un « individu fictif » agrégeait les préférences.

**Mais cette interprétation est trompeuse.**

En effet, dans la construction de Negishi :

- la fonction est définie sur les consommations individuelles  $(x_1, \dots, x_I)$  ;
- il ne s'agit pas d'une fonction d'utilité définie sur les consommations agrégées.

L'« agent représentatif » n'apparaît donc pas directement.

### 6.6.3. Agrégation et agent représentatif

On dira qu'un agent représentatif existe si l'on peut définir une fonction d'utilité  $U(X)$  telle que :

- $X = \sum_i x_i$  (consommation agrégée) ;
- les choix optimaux de cet agent reproduisent les grandeurs agrégées de l'économie.

Autrement dit, résoudre le problème :

$$\max U(X)$$

permet de retrouver directement les équilibres agrégés.

Une telle propriété est en général exceptionnelle.

### 6.6.4. Un cas favorable : préférences Cobb–Douglas

Supposons que tous les agents aient la même fonction d'utilité de type Cobb–Douglas :

$$u_i(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}.$$

On a alors :

$$TMS_{1,2}^i = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{x_2^i}{x_1^i}.$$

À l'équilibre :

$$TMS^A = TMS^B = \frac{p_1}{p_2}.$$

Donc :

$$\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B} = \frac{p_1}{p_2} \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Comme par la règle de la super-égalité :

$$\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B} = \frac{x_2^A + x_2^B}{x_1^A + x_1^B}.$$

on a donc :

$$\frac{x_2^A + x_2^B}{x_1^A + x_1^B} = \frac{p_1}{p_2} \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

ou encore

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{x_2^A + x_2^B}{x_1^A + x_1^B} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Le terme de gauche peut-être interprété comme le TMS d'un agent dont les consommations sont les consommations globales des agents :

$$x_1^{AR} = x_1^A + x_1^B, x_2^{AR} = x_2^A + x_2^B$$

dont le TMS est :

$$TMS_{1,2}^{AR} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{x_2^{AR}}{x_1^{AR}}.$$

et donc la fonction d'utilité :

$$u_{AR}(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}.$$

**Conclusion.** Les consommations agrégées se comportent comme celles d'un agent unique.

Un agent représentatif existe, doté de la même forme fonctionnelle.

**conséquence.**

Dans une économie d'échange, comme la somme des consommations de chaque bien est égale à la dotation globale, le prix relatif  $\frac{p_1}{p_2}$  est égal au TMS de l'agent représentatif *évalué au point de dotation de l'économie*.

### Exercice

Soient deux agents A et B avec  $\alpha = 1/2$ . Leurs dotations sont (9,1) et (1,9). Calculer le prix relatif d'équilibre.

### 6.6.5. Un cas plus général : préférences quadratiques

Considérons des préférences de la forme :

$$u_i(c_1, c_2) = -a_1(c_1 - s_{1i})^2 - a_2(c_2 - s_{2i})^2,$$

avec  $a_1, a_2 > 0$ .

Le TMS est donné par :

$$TMS_i = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{c_1^i - s_{1i}}{c_2^i - s_{2i}}.$$

À l'équilibre :

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{c_1^A - s_{1A}}{c_2^A - s_{2A}} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{c_1^B - s_{1B}}{c_2^B - s_{2B}}.$$

On en déduit :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{c_1^A + c_1^B - (s_{1A} + s_{1B})}{c_2^A + c_2^B - (s_{2A} + s_{2B})}.$$

Cela correspond au TMS d'un agent défini par :

$$U(C_1, C_2) = -a_1(C_1 - S_1)^2 - a_2(C_2 - S_2)^2,$$

avec :

$$S_1 = s_{1A} + s_{1B}, \quad S_2 = s_{2A} + s_{2B}.$$

**Conclusion.** Un agent représentatif existe, bien que les préférences individuelles diffèrent.

### 6.6.6. Utilisation de l'agent représentatif

Lorsque l'agent représentatif existe, l'analyse de l'équilibre peut être simplifiée :

- du côté de la production : une frontière de transformation agrégée ;
- du côté de la demande : une fonction d'utilité agrégée.

On obtient alors directement :

$$TMS^{AR} = TMT,$$

ce qui détermine les grandeurs réelles.

La répartition entre individus est ensuite déterminée par les conditions d'échange (boîte d'Edgeworth).

### 6.6.7. Exercice : équilibre général avec production

On considère une économie composée de deux consommateurs  $A$  et  $B$  et d'une entreprise produisant deux biens  $(Q_1, Q_2)$ .

La technologie de l'entreprise est représentée par la frontière de production :

$$Q_1^2 + Q_2^2 = 125.$$

Les consommateurs ont les préférences :

$$U(c_1, c_2) = \ln(c_1) + \ln(c_2).$$

Les dotations initiales sont :

$$\omega^A = (7.5, 0), \quad \omega^B = (2.5, 5),$$

et chaque agent possède la moitié de l'entreprise.

### Questions.

1. Déterminer la production d'équilibre.
2. Déterminer les prix d'équilibre.
3. Déterminer l'allocation finale des biens entre les agents.
4. Représenter graphiquement l'équilibre en combinant la frontière de production et la boîte d'Edgeworth.

### Résolution.

#### 1. Production optimale.

La production est déterminée par l'égalité entre le taux marginal de transformation (TMT) et le taux marginal de substitution de l'agent représentatif.

La frontière de production est donnée par :

$$Q_1^2 + Q_2^2 = 125.$$

Le TMT vaut :

$$TMT = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Les préférences étant identiques et homothétiques, l'agent représentatif a le même TMS :

$$TMS = \frac{c_1}{c_2}.$$

À l'équilibre :

$$TMT = TMS \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{Q_2} = 1.$$

On en déduit :

$$Q_1 = Q_2.$$

En reportant dans la frontière :

$$2Q_1^2 = 125 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q_2 = \sqrt{62.5}.$$

Ce point est noté  $Q$  sur la figure 6.1.

#### 2. Prix d'équilibre.

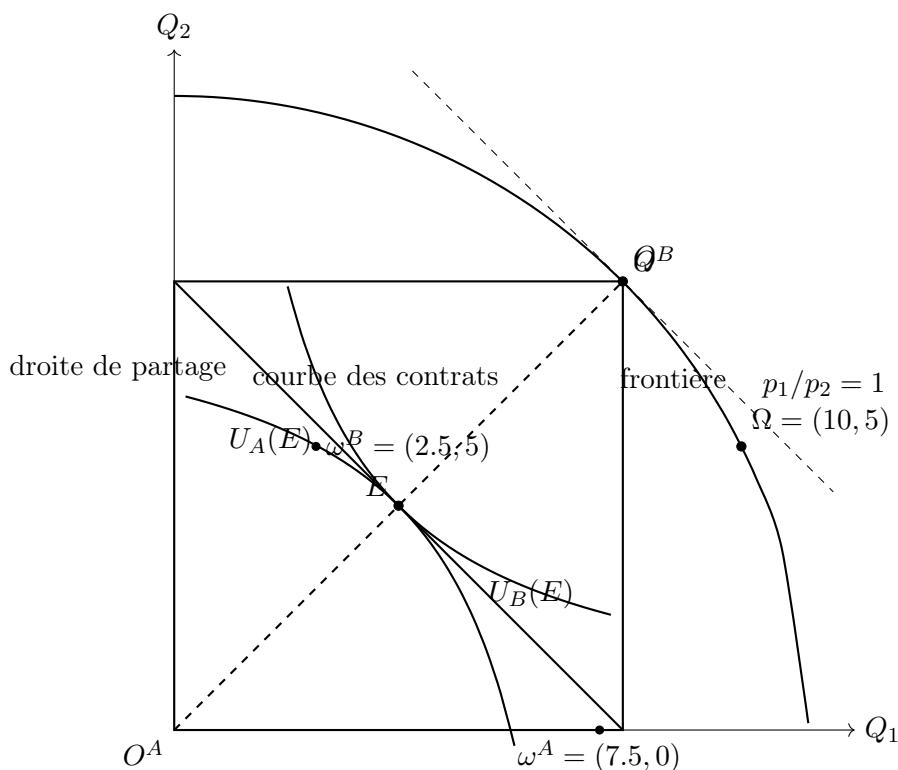


FIGURE 6.1 – Équilibre général avec production : frontière de production et boîte d'Edgeworth

La condition précédente implique :

$$\frac{p_1}{p_2} = 1.$$

La droite de prix est donc de pente  $-1$  et est tangente à la frontière en  $Q$ .

### 3. Répartition des ressources.

La production totale  $(Q_1, Q_2)$  définit la taille de la boîte d'Edgeworth. Celle-ci est donc un carré de côté  $\sqrt{62.5}$ .

Les deux agents ayant les mêmes préférences et possédant chacun la moitié de l'entreprise, leurs revenus sont identiques. À prix égaux, ils choisissent donc le même panier.

L'allocation d'équilibre est alors :

$$c^A = c^B = \left( \frac{Q_1}{2}, \frac{Q_2}{2} \right).$$

Autrement dit, le point d'équilibre  $E$  est le milieu du segment reliant l'origine de la boîte au point  $Q$ .

### 4. Représentation graphique.

La figure 6.1 synthétise ces résultats :

- le point  $Q$  représente la production optimale ;
- la tangence entre la frontière et la droite de prix traduit l'égalité  $TMT = TMS$  ;
- la boîte d'Edgeworth, de sommet supérieur droit  $Q$ , représente les allocations possibles ;
- le point  $E$ , situé sur la diagonale, correspond à une répartition égale entre les deux agents.

Cette construction met en évidence la double dimension de l'équilibre général avec production : un choix de production efficace et une répartition des ressources compatible avec les préférences des agents.

#### 6.6.8. Discussion et limites

L'agent représentatif est un outil puissant, mais profondément problématique.

##### **Sur le plan théorique :**

- il n'existe que dans des cas très particuliers ;
- il dépend fortement des hypothèses sur les préférences.

##### **Sur le plan empirique :**

- il ignore l'hétérogénéité des agents ;
- il masque les questions de distribution ;
- il peut conduire à des conclusions trompeuses.

#### 6.6.9. Conclusion

L'agent représentatif occupe une place paradoxale dans la théorie économique :

- il constitue un outil d'analyse extrêmement commode ;
- mais sa validité repose sur des conditions restrictives ;
- et son interprétation économique demeure fragile.

*Un agent aussi utile que douteux.*

Il permet des raisonnements puissants, notamment en macroéconomie [Klein, 1946] et en finance, mais au prix d'une abstraction dont il convient de mesurer les limites.

# Conclusion

Le présent document se voulait une introduction à la microéconomie. Il n'en constitue, à l'évidence, qu'une infime partie et ne saurait prétendre rendre justice à l'extraordinaire richesse de cette discipline, ni à celle des domaines de l'analyse économique qui en procèdent.

On pourrait dire de cette introduction à la microéconomie ce que l'on dit souvent de la géométrie cartésienne enseignée au collège : elle ne représente qu'un premier contact avec un univers intellectuel immense. De même qu'apparaissent alors, pour la première fois, les équations et les droites tracées dans le plan, apparaissent ici les premiers éléments essentiels de la théorie économique : les raisonnements marginalistes, les conditions d'optimalité, les mécanismes d'équilibre.

Ces outils, simples en apparence, constituent en réalité le socle d'analyses beaucoup plus profondes, qui se déploient ensuite dans des directions multiples : théorie de l'équilibre général, économie publique, théorie des jeux, économie de l'information, finance, macroéconomie.

Une théorie économique est à l'économie ce qu'une carte est à la géographie : une représentation du réel à une certaine échelle. Aucune carte n'est fidèle en tout point à la réalité ; aucune n'est à l'échelle 1 : 1. Toutes simplifient, toutes sélectionnent, toutes abstraient. Mais c'est précisément cette simplification qui les rend utiles : elle permet de saisir des structures, de mettre en évidence des régularités, de raisonner.

La microéconomie présentée dans ce document est sans doute une carte tracée à grande échelle. Elle laisse de côté une multitude de détails : les institutions concrètes, les imperfections de marché, les dynamiques temporelles, l'incertitude, l'hétérogénéité profonde des agents. Mais elle met en lumière des mécanismes fondamentaux :

- le rôle des prix comme signaux ;
- la coordination des décisions individuelles par les marchés ;
- les conditions d'efficacité dans la consommation et la production ;
- et la logique des réarrangements marginaux.

Ces mécanismes ne constituent pas une description littérale des économies réelles. Ils forment plutôt une méthode d'analyse : une manière de poser les problèmes, de structurer les raisonnements, d'identifier les forces à l'œuvre.

C'est en ce sens que l'on peut reprendre la formule désormais classique du statisticien George Box [Box, 1976] :

*« Tous les modèles sont faux, mais certains sont utiles. »*

La microéconomie appartient pleinement à cette catégorie. Elle propose des modèles nécessairement simplifiés, parfois éloignés de la complexité du monde réel, mais qui offrent des outils puissants pour comprendre, discuter et analyser les phénomènes économiques.

Au sein de la « *dismal science* » (Carlyle), cette conviction est largement partagée : la microéconomie constitue une boîte à outils indispensable. Elle ne dit pas tout, elle ne tranche pas tout, mais elle permet de raisonner avec rigueur.

C'est à cette discipline — à ses méthodes, à ses raisonnements, à ses exigences — que ce document aura cherché à initier le lecteur.

# Bibliographie

- [Arrow, 1951] Arrow, K. J. (1951). An extension of the basic theorems of classical welfare economics. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 507–532.
- [Arrow and Debreu, 1954] Arrow, K. J. and Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22(3) :265–290.
- [Barone, 1908] Barone, E. (1908). Il ministro della produzione nello stato collettivista. *Giornale degli Economisti*, 37 :267–293.
- [Bowley, 1924] Bowley, A. L. (1924). *The Mathematical Groundwork of Economics*. Oxford University Press, Oxford.
- [Box, 1976] Box, G. E. P. (1976). Science and statistics. *Journal of the American Statistical Association*, 71(356) :791–799.
- [Chiappori, 1988] Chiappori, P.-A. (1988). Rational household labor supply. *Econometrica*, 56(1) :63–90.
- [Debreu, 1959] Debreu, G. (1959). Theory of value : An axiomatic analysis of economic equilibrium.
- [Debreu and Scarf, 1963] Debreu, G. and Scarf, H. (1963). A limit theorem on the core of an economy. *International Economic Review*, 4(3) :235–246.
- [Edgeworth, 1881] Edgeworth, F. Y. (1881). *Mathematical Psychics*. Kegan Paul, London.
- [Frisch, 1933] Frisch, R. (1933). Propagation problems and impulse problems in dynamic economics. *Economic Essays in Honour of Gustav Cassel*.
- [Hayek, 1935] Hayek, F. A., editor (1935). *Collectivist Economic Planning*. Routledge, London.
- [Hayek, 1937] Hayek, F. A. (1937). Economics and knowledge. *Economica*, 4(13) :33–54.
- [Hayek, 1940] Hayek, F. A. (1940). Socialist calculation : The competitive "solution". *Economica*, 7(26) :125–149.
- [Hayek, 1945] Hayek, F. A. (1945). The use of knowledge in society. *American Economic Review*, 35(4) :519–530.
- [Henderson and Quandt, 1958] Henderson, J. M. and Quandt, R. E. (1958). *Microeconomic Theory : A Mathematical Approach*. McGraw-Hill, New York.
- [Hicks, 1939] Hicks, J. R. (1939). *Value and Capital*. Oxford University Press, Oxford.
- [Humphrey, 1996] Humphrey, T. M. (1996). The early history of the box diagram. *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*, 82(1) :37–76.

- [Hurwicz, 1973] Hurwicz, L. (1973). The design of mechanisms for resource allocation. *American Economic Review*, 63(2) :1–30.
- [Jehle and Reny, 2001] Jehle, G. A. and Reny, P. J. (2001). *Advanced Microeconomic Theory*. Addison Wesley, Boston, 2 edition.
- [Keynes, 1936] Keynes, J. M. (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Macmillan, London.
- [Klein, 1946] Klein, L. R. (1946). Macroeconomics and the theory of rational behavior. *Econometrica*, 14(2) :93–108.
- [Kreps, 1990] Kreps, D. M. (1990). *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton University Press, Princeton.
- [Lange, 1936] Lange, O. (1936). On the economic theory of socialism : Part one. *Review of Economic Studies*, 4(1) :53–71.
- [Lange, 1937] Lange, O. (1937). On the economic theory of socialism : Part two. *Review of Economic Studies*, 4(2) :123–142.
- [Lange, 1942a] Lange, O. (1942a). The foundations of welfare economics. *Econometrica*, 10(3/4) :215–228.
- [Lange, 1942b] Lange, O. (1942b). Say’s law : A restatement and criticism. *Studies in Mathematical Economics and Econometrics*, pages 49–68.
- [Lange and Taylor, 1938] Lange, O. and Taylor, F. M. (1938). *On the Economic Theory of Socialism*. University of Minnesota Press, Minneapolis.
- [Leontief, 1946] Leontief, W. (1946). The pure theory of the guaranteed annual wage contract. *Journal of Political Economy*, 54(1) :76–79.
- [Makowski and Ostroy, 1995] Makowski, L. and Ostroy, J. M. (1995). Appropriation and efficiency : A revision of the first theorem of welfare economics. *American Economic Review*, 85(4) :808–827.
- [Mas-Colell et al., 1995] Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.
- [Mill, 1844] Mill, J. S. (1844). *Essays on Some Unsettled Questions of Political Economy*. John W. Parker, London.
- [Negishi, 1960] Negishi, T. (1960). Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy. *Metroeconomica*, 12(2–3) :92–97.
- [Ostroy, 1980] Ostroy, J. M. (1980). The no-surplus condition as a characterization of perfectly competitive equilibrium. *Journal of Economic Theory*, 22(1) :1–19.
- [Pareto, 1906] Pareto, V. (1906). *Manuale di economia politica*. Società Editrice Libreria, Milano.
- [Picard, 2011] Picard, P. (2011). *Microéconomie*. Montchrestien, Paris. 8ème édition.
- [Ricardo, 1817] Ricardo, D. (1817). *On the Principles of Political Economy and Taxation*. John Murray, London.

- [Samuelson, 1952] Samuelson, P. A. (1952). The transfer problem and transport costs : The terms of trade when impediments are absent. *Economic Journal*, 62(246) :278–304.
- [Scitovsky, 1941] Scitovsky, T. (1941). A note on welfare propositions in economics. *Review of Economic Studies*, 9(1) :77–88.
- [Varian, 1992] Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis*. W. W. Norton, New York, 3 edition.
- [Varian, 2014] Varian, H. R. (2014). *Intermediate Microeconomics : A Modern Approach*. W. W. Norton, New York, 9 edition.
- [von Mises, 1920] von Mises, L. (1920). Die wirtschaftsrechnung im sozialistischen gemeinwesen. *Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik*, 47 :86–121.
- [von Mises, 1935] von Mises, L. (1935). Economic calculation in the socialist commonwealth. in *F. A. Hayek (ed.), Collectivist Economic Planning*, pages 87–130.
- [Walras, 1874] Walras, L. (1874). *Éléments d'économie politique pure*. L. Corbaz, Lausanne.