Recueil d'exercices et de corrigés

Microéconomie : consommateur, producteur et équilibre général

5 mai 2026

Mise en garde

Ce document constitue une première version de travail. Il est susceptible de comporter des erreurs, des imprécisions ou des coquilles.

Les commentaires, suggestions et corrections sont les bienvenus.

Table des matières

Avertissement méthodologique

Ce document rassemble des exercices de microéconomie fondamentale organisés autour de trois grands thèmes : la théorie du consommateur, la théorie du producteur et l'équilibre général en économie d'échanges.

Les exercices et leurs corrigés ont été construits selon les principes suivants :

— les raisonnements mobilisent exclusivement des **solutions intérieures** ;

— les corrigés reposent sur un **raisonnement marginal**, sans recours au lagrangien ;

— les relations essentielles sont formulées à partir des **taux marginaux de substitution** (TMS), des **taux marginaux de substitution technique** (TMST) et, lorsque cela est pertinent, des **taux marginaux de transformation** (TMT) ;

— chaque correction explicite les déductions mathématiques, les interprétations économiques et la logique de résolution ;

— les exercices ont vocation à dépasser les formats trop mécaniquement appris, notamment en généralisant l'analyse à **trois biens** ou **trois facteurs** lorsque cela éclaire la structure du raisonnement.

1 Syllabus de révisions

Présentation générale

Le présent syllabus précise le programme de révisions correspondant au test d'entrée de microéconomie de troisième année. Il porte exclusivement sur la microéconomie fondamentale en concurrence pure et parfaite, dans un cadre statique, sans temps, sans incertitude et sans intervention de la monnaie comme réserve de valeur.

Trois parties du programme sont évaluées :

1. la théorie du consommateur ;

2. la théorie du producteur ;

3. l'équilibre général en économie d'échanges.

L'épreuve attend des étudiants une maîtrise conjointe :

— des **relations théoriques fondamentales** ;
— des **méthodes de résolution** ;
— des **interprétations économiques** des conditions marginales et des résultats obtenus.

Une attention particulière sera portée à la capacité à traiter non seulement des cas classiques à deux biens ou deux facteurs, mais aussi des problèmes à trois ou quatre dimensions. L'objectif n'est donc pas le simple bachotage de configurations standard, mais la vérification d'une maîtrise réelle des outils de base de la microéconomie.

I. Théorie du consommateur

Contenu du programme

Cette première partie porte sur le comportement d'un consommateur soumis à une contrainte budgétaire, dans le cas de préférences strictement croissantes et de solutions intérieures.

Les étudiants doivent maîtriser :

— la construction de la contrainte budgétaire ;
— l'interprétation de cette contrainte comme égalité entre valeur des emplois et valeur des ressources ;
— le calcul des utilités marginales ;
— la condition d'optimalité intérieure

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \cdots = \frac{\mathrm{Um}_n}{p_n};$$

— l'écriture du taux marginal de substitution

$$\mathrm{TMS}_{i,j} = \frac{\mathrm{Um}_i}{\mathrm{Um}_j};$$

— la condition de tangence

$$\mathrm{TMS}_{i,j} = \frac{p_i}{p_j};$$

— les demandes walrassiennes dans les cas usuels, notamment Cobb–Douglas et logarithmiques ;

— l'homogénéité de degré 0 des demandes en prix et revenu.

Compétences attendues

Les étudiants doivent être capables :

— de vérifier si un panier est budgétairement admissible ;

— de déterminer si un panier intérieur est optimal ;

— d'indiquer, lorsqu'il ne l'est pas, dans quel sens le consommateur doit réallouer sa dépense ;

— de calculer explicitement un panier optimal ;

— d'analyser les effets d'une variation du revenu ou des prix ;

— de traiter avec la même rigueur des problèmes à deux, trois ou quatre biens.

Points de méthode

La méthode attendue est la suivante :

1. écrire la contrainte budgétaire ;

2. calculer les utilités marginales ;

3. écrire les conditions marginales d'optimalité ;

4. en déduire des relations entre les quantités consommées ;

5. substituer ces relations dans la contrainte budgétaire ;

6. résoudre le système obtenu ;

7. vérifier la cohérence économique du résultat.

II. Théorie du producteur

Contenu du programme

Cette deuxième partie porte sur la théorie statique du producteur en concurrence pure et parfaite.

Les étudiants doivent maîtriser :

- le programme de minimisation du coût pour un niveau de production donné ;
- la contrainte technologique ;
- les productivités marginales des facteurs ;
- la condition d'optimalité intérieure

$$\frac{\mathrm{Pm}_1}{w_1} = \frac{\mathrm{Pm}_2}{w_2} = \cdots = \frac{\mathrm{Pm}_n}{w_n};$$

- le taux marginal de substitution technique

$$\mathrm{TMST}_{i,j} = \frac{\mathrm{Pm}_i}{\mathrm{Pm}_j};$$

- la condition de tangence

$$\mathrm{TMST}_{i,j} = \frac{w_i}{w_j};$$

- la fonction de coût total, le coût moyen et le coût marginal ;
- la condition d'offre du producteur concurrentiel

$$p = Cm(q);$$

- le lien entre homogénéité de la technologie, rendements à l'échelle et profit.

Compétences attendues

Les étudiants doivent être capables :

- de déterminer si une combinaison productive minimise le coût ;
- d'indiquer, lorsqu'elle ne le fait pas, dans quel sens l'entreprise doit modifier ses facteurs ;
- de calculer les demandes conditionnelles de facteurs ;
- d'en déduire la fonction de coût ;
- de calculer CM et Cm ;
- de déterminer l'offre du producteur ;
- d'interpréter le rôle des rendements à l'échelle ;
- de traiter des problèmes à deux, trois ou quatre facteurs.

Points de méthode

La démarche attendue est la suivante :

1. écrire la contrainte technologique sous forme d'égalité ;
2. calculer les productivités marginales ;

3. écrire les conditions marginales de coût minimal ;

4. en déduire les relations entre facteurs ;

5. substituer ces relations dans la fonction de production ;

6. obtenir les demandes conditionnelles de facteurs ;

7. calculer la fonction de coût, puis en déduire l'offre.

III. Équilibre général en économie d'échanges

Contenu du programme

Cette troisième partie porte sur l'équilibre général walrassien dans une économie d'échanges pure.

Les étudiants doivent maîtriser :

— la notion de dotation initiale ;

— le calcul de la richesse individuelle

$$m_i = p \cdot \omega^i;$$

— la contrainte budgétaire de chaque agent

$$p \cdot c^i = p \cdot \omega^i;$$

— les demandes walrassiennes individuelles ;

— l'agrégation des demandes ;

— les conditions d'équilibre des marchés

$$\sum_i c^i_\ell = \bar{\omega}_\ell;$$

— la loi de Walras

$$p \cdot z(p) = 0;$$

— la normalisation des prix par choix d'un numéraire ;

— l'homogénéité de degré 0 des demandes walrassiennes ;

— l'effet des transferts de revenu et des redistributions de dotations.

Compétences attendues

Les étudiants doivent être capables :

— d'écrire correctement les contraintes budgétaires à partir des dotations ;

— de déterminer les demandes individuelles ;

— de calculer les demandes agrégées ;
— d'écrire les équilibres de marché ;
— d'utiliser la loi de Walras pour ne résoudre que $L - 1$ marchés indépendants dans une économie à L biens ;
— de déterminer les prix d'équilibre et l'allocation d'équilibre ;
— d'analyser l'effet d'un transfert de revenu sur les prix ;
— de distinguer les cas où la demande agrégée dépend du seul revenu total de ceux où elle dépend de sa répartition.

Points de méthode

La démarche attendue est la suivante :

1. calculer, pour chaque agent, la valeur de la dotation initiale ;

2. écrire les contraintes budgétaires ;

3. déterminer les demandes walrassiennes individuelles ;

4. calculer la demande agrégée ;

5. écrire les conditions d'équilibre de marché ;

6. utiliser la loi de Walras pour réduire le nombre d'équations à résoudre ;

7. déterminer les prix relatifs d'équilibre ;

8. en déduire l'allocation d'équilibre et l'interpréter.

Exigences générales

Quel que soit le chapitre considéré, les étudiants doivent être en mesure :

— de rédiger un raisonnement économique ordonné ;
— de justifier explicitement les conditions utilisées ;
— d'effectuer les calculs sans rupture logique ;
— de commenter le sens économique des résultats ;
— de mobiliser les mêmes outils dans des configurations non standard, notamment lorsque le nombre de biens ou de facteurs excède deux.

Le niveau attendu est celui d'une maîtrise solide des fondements analytiques de la microéconomie de licence.

Conseils de révision

La préparation efficace de l'épreuve suppose :

— un apprentissage rigoureux des relations fondamentales ;
— un entraînement régulier au calcul ;
— une attention constante portée à l'interprétation économique des conditions marginales ;
— une pratique systématique d'exercices à deux, trois et quatre biens ou facteurs ;
— une maîtrise effective de la loi de Walras et des propriétés d'homogénéité.

Les étudiants sont invités à ne pas limiter leurs révisions à des schémas standards appris mécaniquement. La réussite à l'épreuve suppose une compréhension réelle des structures du raisonnement microéconomique.

Synthèse

L'épreuve vise à évaluer la capacité des candidats à mobiliser, avec rigueur et autonomie, les outils élémentaires mais fondamentaux de la microéconomie. Elle repose sur trois exigences complémentaires :

— la maîtrise des relations théoriques ;
— la maîtrise des méthodes de résolution ;
— la maîtrise des interprétations économiques.

Le programme de révisions couvre donc l'ensemble des mécanismes de base du choix du consommateur, du comportement du producteur et de la formation des prix en équilibre général d'échanges.

2 Théorie du consommateur

2.1 Rappels théoriques

1. Le problème du consommateur

On considère un consommateur qui choisit un panier de consommation

$$c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n_+,$$

où c_j désigne la quantité consommée du bien j, pour $j = 1, \dots, n$.

Les prix des biens sont notés

$$p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_{++}.$$

Le consommateur évalue les paniers au moyen d'une fonction d'utilité

$$u(c_1, \ldots, c_n).$$

Dans toute cette section, on se place volontairement dans le cadre de **solutions intérieures**. Cela signifie que, à l'optimum,

$$c_j > 0 \qquad \text{pour tout } j = 1, \ldots, n.$$

Le problème du consommateur consiste à choisir le panier qui maximise son utilité sous contrainte budgétaire :

$$\max_{c_1,\ldots,c_n \geq 0} u(c_1, \ldots, c_n)$$

sous la contrainte

$$p_1 c_1 + \cdots + p_n c_n \leq m,$$

où $m > 0$ désigne le revenu monétaire.

2. Construction de la contrainte budgétaire

La contrainte budgétaire traduit une idée simple et fondamentale :

$$\textit{valeur des emplois} \leq \textit{valeur des ressources}.$$

Ici :

— la *valeur des emplois* est la dépense de consommation :

$$p_1 c_1 + \cdots + p_n c_n;$$

— la *valeur des ressources* est le revenu monétaire m.

La contrainte budgétaire s'écrit donc

$$\boxed{p_1 c_1 + \cdots + p_n c_n \leq m.}$$

Lorsque les préférences sont strictement croissantes, le consommateur a toujours intérêt à utiliser la totalité de son revenu. En effet, si une partie du revenu restait inutilisée, il pourrait augmenter au moins une consommation et donc accroître son utilité.

La contrainte budgétaire est alors **saturée** à l'optimum :

$$\boxed{p_1 c_1 + \cdots + p_n c_n = m.}$$

Dans le cas de deux biens, on obtient

$$\boxed{p_1c_1 + p_2c_2 = m.}$$

Dans le cas de trois biens,

$$\boxed{p_1c_1 + p_2c_2 + p_3c_3 = m.}$$

3. Utilités marginales et interprétation économique

L'utilité marginale du bien j est définie par

$$Um_j(c) = \frac{\partial u(c)}{\partial c_j}.$$

Elle mesure l'accroissement d'utilité procuré par une très légère augmentation de la consommation du bien j, les autres consommations étant maintenues constantes.

Le rapport

$$\frac{Um_j}{p_j}$$

mesure l'**utilité marginale par euro dépensé** dans le bien j. C'est une relation essentielle.

Interprétation. Si

$$\frac{Um_i}{p_i} > \frac{Um_j}{p_j},$$

alors un euro dépensé dans le bien i rapporte plus d'utilité qu'un euro dépensé dans le bien j. Le panier considéré ne peut donc pas être optimal : le consommateur doit augmenter sa consommation du bien i et diminuer celle du bien j.

À l'optimum intérieur, les utilités marginales par euro dépensé doivent être égales :

$$\boxed{\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} = \cdots = \frac{Um_n}{p_n}.}$$

Cette condition constitue la règle marginale fondamentale du choix du consommateur.

4. Le taux marginal de substitution

Dans le cas de deux biens 1 et 2, le taux marginal de substitution du bien 1 au bien 2 est défini par

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{Um_1}{Um_2}.$$

Le $\text{TMS}_{1,2}$ mesure la quantité de bien 2 que le consommateur est prêt à abandonner pour obtenir une unité supplémentaire de bien 1, à utilité maintenue constante.

À l'optimum intérieur, la condition d'égalité des utilités marginales par euro dépensé

$$\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2}$$

peut se réécrire

$$\frac{Um_1}{Um_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Donc

$$\boxed{\text{TMS}_{1,2} = \frac{p_1}{p_2}.}$$

Interprétation économique. À l'optimum, le taux auquel le consommateur est prêt à substituer le bien 2 au bien 1 doit être exactement égal au taux auquel le marché autorise cette substitution.

Si

$$\text{TMS}_{1,2} > \frac{p_1}{p_2},$$

le consommateur valorise relativement davantage le bien 1 que ne le fait le marché. Il doit donc augmenter sa consommation du bien 1 et réduire celle du bien 2.

À l'inverse, si

$$\text{TMS}_{1,2} < \frac{p_1}{p_2},$$

il doit diminuer sa consommation du bien 1 et augmenter celle du bien 2.

5. Cas à trois biens

Lorsque le consommateur choisit entre trois biens 1, 2 et 3, la contrainte budgétaire s'écrit

$$p_1c_1 + p_2c_2 + p_3c_3 = m.$$

À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\boxed{\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} = \frac{Um_3}{p_3}.}$$

Cela équivaut à deux égalités indépendantes, par exemple

$$\frac{Um_1}{Um_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \text{et} \qquad \frac{Um_1}{Um_3} = \frac{p_1}{p_3}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\text{TMS}_{1,2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \text{et} \qquad \text{TMS}_{1,3} = \frac{p_1}{p_3}.}$$

On pourrait aussi écrire

$$\mathrm{TMS}_{2,3} = \frac{p_2}{p_3}.$$

Point pédagogique important. Le passage de deux à trois biens ne change pas la logique économique. Il ajoute simplement une condition marginale supplémentaire. La difficulté n'est donc pas conceptuelle, mais uniquement organisationnelle : il faut savoir écrire et combiner plusieurs égalités de la même nature.

6. Méthode générale de résolution d'un optimum intérieur

Dans les exercices de théorie du consommateur, on procédera systématiquement de la manière suivante.

Étape 1. Écrire la contrainte budgétaire sous forme d'égalité :

$$p_1c_1 + \cdots + p_nc_n = m.$$

Étape 2. Calculer les utilités marginales

$$Um_1, \ldots, Um_n.$$

Étape 3. Écrire les conditions marginales d'optimalité :

$$\frac{Um_1}{p_1} = \cdots = \frac{Um_n}{p_n}.$$

Étape 4. Transformer ces égalités en relations entre les consommations.

Étape 5. Reporter ces relations dans la contrainte budgétaire.

Étape 6. Déduire les consommations optimales, puis vérifier leur positivité.

Dans le cas de deux biens, cette méthode revient très souvent à utiliser :

$$\boxed{\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \text{et} \qquad p_1c_1 + p_2c_2 = m.}$$

Dans le cas de trois biens, on utilise :

$$\boxed{\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} = \frac{Um_3}{p_3} \qquad \text{et} \qquad p_1c_1 + p_2c_2 + p_3c_3 = m.}$$

7. Homogénéité de degré 0 et absence d'illusion monétaire

Les demandes walrassiennes du consommateur sont homogènes de degré 0 par rapport à l'ensemble des prix et au revenu. Cela signifie que, pour tout scalaire $\lambda > 0$,

$$\boxed{x(\lambda p, \lambda m) = x(p, m).}$$

Interprétation économique. Si tous les prix et le revenu sont multipliés par un même facteur, le panier optimal ne change pas. En effet, ce ne sont pas les prix nominaux qui importent, mais les prix relatifs et le pouvoir d'achat réel.

Cette propriété exprime l'**absence d'illusion monétaire**.

Elle justifie le choix fréquent d'un **numéraire**. Par exemple, si l'on pose

$$p_1 = 1,$$

cela ne modifie pas les allocations réelles. Cela fixe seulement l'unité de compte.

8. Proportionnalité au revenu dans les cas usuels du recueil

Dans plusieurs exercices classiques, les demandes sont non seulement homogènes de degré 0 en prix et revenu, mais aussi **linéaires en revenu** : si le revenu double, les consommations optimales doublent.

Cette propriété n'est pas générale pour toute fonction d'utilité, mais elle vaut dans les cas usuels mobilisés dans ce recueil, notamment pour les préférences Cobb–Douglas et pour les utilités logarithmiques pondérées.

Dans ces cas, pour des prix donnés, on a

$$\boxed{x(p, m) = m\, x(p, 1).}$$

Interprétation. À prix fixés, les consommations optimales sont proportionnelles au revenu. Cette propriété sera particulièrement utile en économie d'échanges lorsque le revenu de chaque agent est égal à la valeur de sa dotation.

9. Cas des préférences Cobb–Douglas

Considérons d'abord le cas à deux biens :

$$u(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{\beta}, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Les utilités marginales sont

$$Um_1 = \alpha c_1^{\alpha-1} c_2^{\beta}, \qquad Um_2 = \beta c_1^{\alpha} c_2^{\beta-1}.$$

Le taux marginal de substitution vaut donc

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{Um_1}{Um_2} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{c_2}{c_1}.$$

La condition d'optimalité

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{p_1}{p_2}$$

devient

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{c_2}{c_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

On en déduit

$$\alpha p_2 c_2 = \beta p_1 c_1.$$

Cette relation signifie que les dépenses optimales vérifient

$$\boxed{\beta p_1 c_1 = \alpha p_2 c_2.}$$

En la combinant avec la contrainte budgétaire

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 = m,$$

on obtient

$$\boxed{c_1^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{m}{p_1}, \qquad c_2^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{m}{p_2}.}$$

Interprétation. Le consommateur consacre au bien 1 la part budgétaire

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

et au bien 2 la part

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Dans le cas à trois biens,

$$u(c_1, c_2, c_3) = c_1^{\alpha} c_2^{\beta} c_3^{\gamma}, \qquad \alpha, \beta, \gamma > 0,$$

le même raisonnement donne

$$\boxed{c_1^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{m}{p_1}, \qquad c_2^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{m}{p_2}, \qquad c_3^* = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{m}{p_3}.}$$

10. Cas des utilités logarithmiques pondérées

Considérons maintenant

$$u(c_1, c_2) = a\ln(c_1) + b\ln(c_2), \qquad a > 0,\ b > 0.$$

Les utilités marginales sont

$$Um_1 = \frac{a}{c_1}, \qquad Um_2 = \frac{b}{c_2}.$$

Le taux marginal de substitution vaut

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{Um_1}{Um_2} = \frac{a}{b}\frac{c_2}{c_1}.$$

La condition d'optimalité

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{p_1}{p_2}$$

devient

$$\frac{a}{b}\frac{c_2}{c_1} = \frac{p_1}{p_2},$$

soit

$$ap_2c_2 = bp_1c_1.$$

En combinant avec la contrainte budgétaire, on obtient

$$\boxed{c_1^* = \frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1}, \qquad c_2^* = \frac{b}{a+b}\frac{m}{p_2}.}$$

De même, dans le cas

$$u(c_1, c_2, c_3) = a\ln(c_1) + b\ln(c_2) + d\ln(c_3), \qquad a, b, d > 0,$$

on obtient

$$\boxed{c_1^* = \frac{a}{a+b+d}\frac{m}{p_1}, \qquad c_2^* = \frac{b}{a+b+d}\frac{m}{p_2}, \qquad c_3^* = \frac{d}{a+b+d}\frac{m}{p_3}.}$$

Conclusion commune aux cas Cobb–Douglas et logarithmiques. Dans tous ces cas, les demandes prennent la forme :

$$\boxed{c_j^* = \theta_j\frac{m}{p_j}, \qquad \theta_j > 0, \qquad \sum_j \theta_j = 1.}$$

Les θ_j sont alors les parts budgétaires constantes.

11. Règles de diagnostic rapide dans les exercices

Dans les exercices de raisonnement marginal, on utilisera constamment les trois diagnostics suivants.

a) Test d'optimalité d'un panier Un panier intérieur est optimal si et seulement si

$$\frac{Um_1}{p_1} = \cdots = \frac{Um_n}{p_n}.$$

b) Sens de correction du panier Si, pour deux biens i et j,

$$\frac{Um_i}{p_i} > \frac{Um_j}{p_j},$$

alors il faut augmenter c_i et diminuer c_j.

c) Cas à plusieurs biens Avec trois biens ou davantage, il faut comparer chaque bien aux autres à travers les rapports

$$\frac{Um_j}{p_j}.$$

Le bien pour lequel ce rapport est le plus élevé est, localement, celui qu'il faut davantage consommer ; celui pour lequel il est le plus faible est celui dont il faut réduire la consommation.

12. Synthèse des relations essentielles

Pour résoudre les exercices de théorie du consommateur figurant dans ce recueil, les relations fondamentales à maîtriser sont les suivantes :

$$\boxed{p_1c_1 + \cdots + p_nc_n = m}$$

(contraint budgétaire saturée),

$$\boxed{\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} = \cdots = \frac{Um_n}{p_n}}$$

(condition marginale d'optimalité intérieure),

$$\boxed{\mathrm{TMS}_{i,j} = \frac{Um_i}{Um_j} = \frac{p_i}{p_j}}$$

(condition de tangence entre courbe d'indifférence et droite de budget),

$$\boxed{x(\lambda p, \lambda m) = x(p, m)}$$

(homogénéité de degré 0 en prix et revenu),

et, dans les cas usuels Cobb–Douglas ou logarithmiques,

$$\boxed{c_j^* = \theta_j \frac{m}{p_j}, \qquad \sum_j \theta_j = 1.}$$

Ces relations constituent l'ossature théorique de tous les exercices qui suivent.

2.2 Intitulés

Exercice 1

On considère un consommateur dont les préférences portent sur trois biens de consommation 1, 2 et 3. Sa fonction d'utilité est

$$u(c_1, c_2, c_3) = c_1 c_2^2 c_3,$$

où $c_j > 0$ désigne la quantité consommée du bien j.

Les prix des biens sont

$$p_1 = 2, \qquad p_2 = 3, \qquad p_3 = 6,$$

et le revenu monétaire du consommateur est

$$m = 192.$$

On suppose dans tout l'exercice que la solution optimale est intérieure.

1. Vérifier que le panier
$$\bar{c} = (24, 20, 14)$$
est budgétairement admissible.

2. Ce panier est-il optimal ? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des conditions marginales d'optimalité.

3. Si ce panier n'est pas optimal, indiquer dans quel sens le consommateur doit modifier ses consommations.

4. Déterminer le panier optimal du consommateur.

Exercice 2

On considère un consommateur dont les préférences portent sur quatre biens de consommation 1, 2, 3 et 4. Sa fonction d'utilité est

$$u(c_1, c_2, c_3, c_4) = 2\ln(c_1) + 3\ln(c_2) + \ln(c_3) + 4\ln(c_4),$$

où $c_j > 0$ désigne la quantité consommée du bien j.

Les prix des biens sont

$$p_1 = 2, \qquad p_2 = 3, \qquad p_3 = 4, \qquad p_4 = 5,$$

et le revenu monétaire du consommateur est

$$m = 600.$$

On suppose dans tout l'exercice que la solution optimale est intérieure.

1. Vérifier que le panier
$$\bar{c} = (50, 70, 10, 50)$$
est budgétairement admissible.

2. Ce panier est-il optimal ? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des conditions marginales d'optimalité.

3. Si ce panier n'est pas optimal, indiquer dans quel sens le consommateur doit modifier ses consommations.

4. Déterminer le panier optimal du consommateur.

5. On multiplie tous les prix et le revenu par 2. Sans refaire tous les calculs, déterminer le nouveau panier optimal et justifier votre réponse.

Exercice 3

On considère un consommateur dont les préférences portent sur deux biens de consommation 1 et 2. Sa fonction d'utilité est

$$u(c_1, c_2) = c_1^3 c_2^2,$$

où $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ désignent les quantités consommées des deux biens.

Dans un premier temps, les prix sont

$$p_1 = 8, \qquad p_2 = 4,$$

et le revenu monétaire du consommateur est

$$m = 600.$$

On suppose dans tout l'exercice que la solution optimale est intérieure.

1. Vérifier que le panier
$$\bar{c} = (30, 90)$$

est budgétairement admissible.

2. Ce panier est-il optimal ? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide du taux marginal de substitution et des utilités marginales par euro dépensé.

3. Si ce panier n'est pas optimal, indiquer dans quel sens le consommateur doit modifier ses consommations.

4. Déterminer le panier optimal correspondant aux prix $(p_1, p_2) = (8, 4)$ et au revenu $m = 600$.

5. On suppose maintenant que les prix deviennent

$$p_1' = 12, \qquad p_2' = 3,$$

le revenu demeurant égal à

$$m = 600.$$

Déterminer le nouveau panier optimal.

6. Comparer les deux paniers optimaux et commenter économiquement le sens de la variation observée.

Exercice 4

On considère un consommateur dont les préférences portent sur trois biens de consommation 1, 2 et 3. Sa fonction d'utilité est

$$u(c_1, c_2, c_3) = \ln(c_1) + 2\ln(c_2) + 3\ln(c_3),$$

où $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 > 0$ désignent les quantités consommées des trois biens.

Les prix des biens sont

$$p_1 = 1, \qquad p_2 = 2, \qquad p_3 = 6,$$

et le revenu monétaire du consommateur est

$$m = 360.$$

On suppose dans tout l'exercice que la solution optimale est intérieure.

1. Vérifier que le panier

$$\bar{c} = (40, 40, 40)$$

est budgétairement admissible.

2. Ce panier est-il optimal ? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des conditions marginales d'optimalité.

3. Si ce panier n'est pas optimal, indiquer dans quel sens le consommateur doit modifier ses consommations.

4. Déterminer le panier optimal.

5. Le revenu du consommateur augmente ensuite et devient

$$m' = 540,$$

les prix demeurant inchangés. Déterminer le nouveau panier optimal *sans refaire tous les calculs*, et justifier soigneusement la méthode employée.

6. Comparer les deux paniers optimaux et interpréter économiquement le résultat obtenu.

Exercice 5

On considère un consommateur dont les préférences portent sur quatre biens de consommation 1, 2, 3 et 4. Sa fonction d'utilité est

$$u(c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1^2 c_2 c_3^3 c_4,$$

où $c_j > 0$ désigne la quantité consommée du bien j.

Les prix des biens sont

$$p_1 = 2, \qquad p_2 = 3, \qquad p_3 = 4, \qquad p_4 = 6,$$

et le revenu monétaire du consommateur est

$$m = 840.$$

On suppose dans tout l'exercice que la solution optimale est intérieure.

1. Vérifier que le panier
$$\bar{c} = (90, 40, 90, 30)$$
est budgétairement admissible.

2. Ce panier est-il optimal ? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des conditions marginales d'optimalité.

3. Si ce panier n'est pas optimal, indiquer dans quel sens le consommateur doit modifier ses consommations.

4. Déterminer le panier optimal.

5. On suppose ensuite que le prix du bien 4 diminue et devient

$$p_4' = 3,$$

les autres prix et le revenu demeurant inchangés. Déterminer le nouveau panier optimal.

6. Comparer les deux paniers optimaux et commenter économiquement le résultat obtenu.

Exercice 6

On considère un consommateur dont les préférences portent sur quatre biens de consommation 1, 2, 3 et 4. Sa fonction d'utilité est

$$u(c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1^2 c_2 c_3 c_4^2,$$

où $c_j > 0$ désigne la quantité consommée du bien j.

On note $q > 0$ un paramètre. Les prix des biens sont

$$p_1 = q, \qquad p_2 = 2q, \qquad p_3 = 3q, \qquad p_4 = 6q,$$

et le revenu monétaire du consommateur est

$$m = 360q.$$

On suppose dans tout l'exercice que la solution optimale est intérieure.

1. Vérifier que le panier

$$\bar{c} = (90, 30, 20, 25)$$

est budgétairement admissible, pour tout $q > 0$.

2. Ce panier est-il optimal ? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des conditions marginales d'optimalité.

3. Si ce panier n'est pas optimal, indiquer dans quel sens le consommateur doit modifier ses consommations.

4. Déterminer le panier optimal en fonction de q.

5. Montrer que le panier optimal trouvé à la question précédente est en réalité indépendant de q. Expliquer précisément l'intuition économique de ce résultat.

6. On suppose maintenant que les prix deviennent

$$p_1' = q, \qquad p_2' = q, \qquad p_3' = 6q, \qquad p_4' = 6q,$$

le revenu demeurant égal à

$$m = 360q.$$

Déterminer le nouveau panier optimal, puis comparer ce nouveau panier à l'ancien et commenter économiquement le résultat obtenu.

2.3 Corrections

Corrigé de l'exercice 1

On considère le problème de choix du consommateur :

$$\max_{c_1,c_2,c_3>0} u(c_1, c_2, c_3) = c_1 c_2^2 c_3$$

sous la contrainte budgétaire

$$2c_1 + 3c_2 + 6c_3 = 192.$$

Comme les préférences sont strictement croissantes en chacun des trois biens, la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum.

1. Vérification de l'admissibilité budgétaire du panier proposé. On considère le panier

$$\bar{c} = (24, 20, 14).$$

Sa dépense totale vaut

$$2 \times 24 + 3 \times 20 + 6 \times 14.$$

Calculons :

$$2 \times 24 = 48, \qquad 3 \times 20 = 60, \qquad 6 \times 14 = 84.$$

Ainsi,

$$48 + 60 + 84 = 192.$$

Donc

$$2\bar{c}_1 + 3\bar{c}_2 + 6\bar{c}_3 = 192 = m.$$

Conclusion. Le panier $\bar{c} = (24, 20, 14)$ est bien **budgétairement admissible**, et même exactement situé sur la contrainte budgétaire.

2. Test d'optimalité du panier proposé. **Rappel de cours.** Dans le cas d'une solution intérieure portant sur trois biens, le panier optimal doit vérifier :

$$\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} = \frac{Um_3}{p_3},$$

où Um_j désigne l'utilité marginale du bien j.

Autrement dit, à l'optimum, un euro supplémentaire dépensé dans chacun des biens doit procurer le même supplément d'utilité.

Calcul des utilités marginales. La fonction d'utilité est

$$u(c_1, c_2, c_3) = c_1 c_2^2 c_3.$$

On obtient donc :

$$Um_1 = \frac{\partial u}{\partial c_1} = c_2^2 c_3,$$

$$Um_2 = \frac{\partial u}{\partial c_2} = 2c_1 c_2 c_3,$$

$$Um_3 = \frac{\partial u}{\partial c_3} = c_1 c_2^2.$$

Évaluation en $\bar{c} = (24, 20, 14)$. On remplace $c_1 = 24$, $c_2 = 20$, $c_3 = 14$.

D'abord,

$$Um_1(\bar{c}) = 20^2 \times 14 = 400 \times 14 = 5600.$$

Ensuite,

$$Um_2(\bar{c}) = 2 \times 24 \times 20 \times 14.$$

Calculons étape par étape :

$$24 \times 20 = 480, \qquad 480 \times 14 = 6720, \qquad 2 \times 6720 = 13440.$$

Donc

$$Um_2(\bar{c}) = 13440.$$

Enfin,

$$Um_3(\bar{c}) = 24 \times 20^2 = 24 \times 400 = 9600.$$

On compare maintenant les utilités marginales par euro dépensé :

$$\frac{Um_1(\bar{c})}{p_1} = \frac{5600}{2} = 2800,$$

$$\frac{Um_2(\bar{c})}{p_2} = \frac{13440}{3} = 4480,$$

$$\frac{Um_3(\bar{c})}{p_3} = \frac{9600}{6} = 1600.$$

On obtient donc :

$$\frac{Um_1(\bar{c})}{p_1} = 2800, \qquad \frac{Um_2(\bar{c})}{p_2} = 4480, \qquad \frac{Um_3(\bar{c})}{p_3} = 1600.$$

Ces trois rapports ne sont pas égaux. En particulier,

$$\frac{Um_2(\bar{c})}{p_2} > \frac{Um_1(\bar{c})}{p_1} > \frac{Um_3(\bar{c})}{p_3}.$$

Conclusion. Le panier $\bar{c}$ n'est **pas optimal**.

3. Sens de modification du panier. Puisque

$$\frac{Um_2}{p_2} > \frac{Um_1}{p_1} > \frac{Um_3}{p_3},$$

le bien 2 procure, au voisinage du panier considéré, le plus grand supplément d'utilité par euro dépensé.

À l'inverse, le bien 3 est celui qui procure le plus faible supplément d'utilité par euro dépensé.

Le consommateur a donc intérêt à transférer une partie de sa dépense :

— vers le bien 2,
— en réduisant au moins une partie de sa consommation des biens 1 et 3.

Plus précisément, le diagnostic marginal conduit à dire que le consommateur doit :

$$\boxed{\text{augmenter } c_2, \text{ diminuer } c_1, \text{ et diminuer } c_3.}$$

Interprétation économique. Au panier initial, un euro dépensé en bien 2 rapporte plus qu'un euro dépensé en bien 1 ou en bien 3. Le panier n'est donc pas correctement arbitré du point de vue marginal.

4. Détermination du panier optimal. Étape 1 : écrire les conditions marginales d'optimalité.

Comme la solution optimale est intérieure, on doit avoir :

$$\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} = \frac{Um_3}{p_3}.$$

Compte tenu des expressions des utilités marginales, cela donne

$$\frac{c_2^2 c_3}{2} = \frac{2c_1c_2c_3}{3} = \frac{c_1c_2^2}{6}.$$

Il suffit d'exploiter deux égalités indépendantes, par exemple :

$$\frac{c_2^2 c_3}{2} = \frac{2c_1c_2c_3}{3}, \qquad \frac{c_2^2 c_3}{2} = \frac{c_1c_2^2}{6}.$$

Étape 2 : première relation entre les consommations.

Partons de

$$\frac{c_2^2 c_3}{2} = \frac{2c_1c_2c_3}{3}.$$

Comme on est dans un optimum intérieur, on a

$$c_2 > 0 \qquad \text{et} \qquad c_3 > 0,$$

on peut donc diviser par c_2c_3. Il vient :

$$\frac{c_2}{2} = \frac{2c_1}{3}.$$

On multiplie ensuite par 6 :

$$3c_2 = 4c_1.$$

Autrement dit,

$$\boxed{c_2 = \frac{4}{3}c_1.}$$

Étape 3 : deuxième relation entre les consommations.

Partons maintenant de

$$\frac{c_2^2 c_3}{2} = \frac{c_1c_2^2}{6}.$$

Comme $c_2 > 0$, on peut diviser par c_2^2. On obtient :

$$\frac{c_3}{2} = \frac{c_1}{6}.$$

On multiplie par 6 :

$$3c_3 = c_1.$$

Donc

$$\boxed{c_3 = \frac{1}{3}c_1.}$$

Étape 4 : utilisation de la contrainte budgétaire.

La contrainte budgétaire est

$$2c_1 + 3c_2 + 6c_3 = 192.$$

On y remplace c_2 et c_3 par les expressions obtenues :

$$2c_1 + 3\left(\frac{4}{3}c_1\right) + 6\left(\frac{1}{3}c_1\right) = 192.$$

Calculons chaque terme :

$$3\left(\frac{4}{3}c_1\right) = 4c_1, \qquad 6\left(\frac{1}{3}c_1\right) = 2c_1.$$

Donc

$$2c_1 + 4c_1 + 2c_1 = 192.$$

Ainsi,

$$8c_1 = 192.$$

On en déduit

$$c_1 = 24.$$

Étape 5 : calcul de c_2 et c_3.

Comme

$$c_2 = \frac{4}{3}c_1,$$

on obtient

$$c_2 = \frac{4}{3} \times 24 = 32.$$

Et comme

$$c_3 = \frac{1}{3}c_1,$$

on obtient

$$c_3 = \frac{1}{3} \times 24 = 8.$$

Conclusion. Le panier optimal est

$$\boxed{(c_1^*, c_2^*, c_3^*) = (24, 32, 8).}$$

5. Vérification finale. Vérifions que ce panier satisfait bien la contrainte budgétaire :

$$2 \times 24 + 3 \times 32 + 6 \times 8 = 48 + 96 + 48 = 192.$$

La contrainte budgétaire est donc bien satisfaite.

Vérifions aussi les conditions marginales.

Au panier optimal,

$$Um_1 = 32^2 \times 8 = 1024 \times 8 = 8192,$$

$$Um_2 = 2 \times 24 \times 32 \times 8.$$

Calculons :

$$24 \times 32 = 768, \qquad 768 \times 8 = 6144, \qquad 2 \times 6144 = 12288.$$

Donc

$$Um_2 = 12288.$$

Enfin,

$$Um_3 = 24 \times 32^2 = 24 \times 1024 = 24576.$$

Les utilités marginales par euro dépensé valent alors :

$$\frac{Um_1}{p_1} = \frac{8192}{2} = 4096,$$

$$\frac{Um_2}{p_2} = \frac{12288}{3} = 4096,$$

$$\frac{Um_3}{p_3} = \frac{24576}{6} = 4096.$$

On a bien

$$\boxed{\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} = \frac{Um_3}{p_3}.}$$

Le panier trouvé est donc bien l'optimum intérieur recherché.

Réponse finale.

Le panier $(24, 20, 14)$ est budgétairement admissible, mais il n'est pas optimal.
Le consommateur doit augmenter c_2 et diminuer c_1 et c_3.
Le panier optimal est $(24, 32, 8)$.

Corrigé de l'exercice 2

On considère le problème de choix du consommateur :

$$\max_{c_1, c_2, c_3, c_4 > 0} u(c_1, c_2, c_3, c_4) = 2\ln(c_1) + 3\ln(c_2) + \ln(c_3) + 4\ln(c_4)$$

sous la contrainte budgétaire

$$2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + 5c_4 = 600.$$

Comme les préférences sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^4_{++}$, la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum.

1. Vérification de l'admissibilité budgétaire du panier proposé. On considère le panier

$$\bar{c} = (50, 70, 10, 50).$$

Sa dépense totale vaut

$$2 \times 50 + 3 \times 70 + 4 \times 10 + 5 \times 50.$$

Calculons terme à terme :

$$2 \times 50 = 100, \qquad 3 \times 70 = 210, \qquad 4 \times 10 = 40, \qquad 5 \times 50 = 250.$$

Ainsi,

$$100 + 210 + 40 + 250 = 600.$$

Donc

$$2\bar{c}_1 + 3\bar{c}_2 + 4\bar{c}_3 + 5\bar{c}_4 = 600 = m.$$

Conclusion. Le panier $\bar{c} = (50, 70, 10, 50)$ est bien **budgétairement admissible**.

2. Test d'optimalité du panier proposé. Rappel de cours. Dans le cas d'une solution intérieure portant sur plusieurs biens, le panier optimal doit vérifier l'égalité des utilités marginales par euro dépensé :

$$\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} = \frac{Um_3}{p_3} = \frac{Um_4}{p_4}.$$

Cette condition peut aussi se lire en termes de taux marginaux de substitution. Par exemple, pour tout $j \in \{2, 3, 4\}$,

$$\text{TMS}_{1,j} = \frac{Um_1}{Um_j} = \frac{p_1}{p_j}.$$

Mais, dans un problème à quatre biens, il est souvent plus commode de raisonner directement à partir des rapports

$$\frac{Um_j}{p_j}.$$

Calcul des utilités marginales. La fonction d'utilité est

$$u(c_1, c_2, c_3, c_4) = 2\ln(c_1) + 3\ln(c_2) + \ln(c_3) + 4\ln(c_4).$$

On en déduit :

$$Um_1 = \frac{2}{c_1}, \qquad Um_2 = \frac{3}{c_2}, \qquad Um_3 = \frac{1}{c_3}, \qquad Um_4 = \frac{4}{c_4}.$$

Évaluation en $\bar{c} = (50, 70, 10, 50)$. On obtient :

$$Um_1(\bar{c}) = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}, \qquad Um_2(\bar{c}) = \frac{3}{70}, \qquad Um_3(\bar{c}) = \frac{1}{10}, \qquad Um_4(\bar{c}) = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}.$$

On compare maintenant les utilités marginales par euro dépensé :

$$\frac{Um_1(\bar{c})}{p_1} = \frac{1/25}{2} = \frac{1}{50},$$

$$\frac{Um_2(\bar{c})}{p_2} = \frac{3/70}{3} = \frac{1}{70},$$

$$\frac{Um_3(\bar{c})}{p_3} = \frac{1/10}{4} = \frac{1}{40},$$

$$\frac{Um_4(\bar{c})}{p_4} = \frac{2/25}{5} = \frac{2}{125}.$$

On peut aussi donner leurs valeurs décimales :

$$\frac{1}{50} = 0{,}02, \qquad \frac{1}{70} \approx 0{,}0143, \qquad \frac{1}{40} = 0{,}025, \qquad \frac{2}{125} = 0{,}016.$$

On obtient donc l'ordre suivant :

$$\frac{Um_3(\bar{c})}{p_3} > \frac{Um_1(\bar{c})}{p_1} > \frac{Um_4(\bar{c})}{p_4} > \frac{Um_2(\bar{c})}{p_2}.$$

Ces quatre rapports ne sont pas égaux.

Conclusion. Le panier $\bar{c}$ n'est **pas optimal**.

3. Sens de modification du panier. L'analyse marginale montre que :

$$\frac{Um_3}{p_3}$$

est le plus élevé. Le bien 3 est donc celui qui procure, au voisinage du panier initial, le plus d'utilité supplémentaire par euro dépensé.

À l'inverse,

$$\frac{Um_2}{p_2}$$

est le plus faible. Le bien 2 est donc celui qui procure le moins d'utilité supplémentaire par euro dépensé.

Le consommateur doit donc transférer une partie de sa dépense :

$$\text{du bien 2 vers le bien 3.}$$

Mais l'analyse montre aussi que

$$\frac{Um_1}{p_1} > \frac{Um_4}{p_4} > \frac{Um_2}{p_2}.$$

Le bien 1 est lui aussi relativement sous-consommé, tandis que le bien 4 demeure relativement surconsommé par rapport aux biens 1 et 3.

Ainsi, le sens général de correction du panier est :

$$\boxed{\text{augmenter } c_1 \text{ et } c_3, \qquad \text{diminuer } c_2 \text{ et } c_4.}$$

Interprétation économique. Dans le panier initial, le dernier euro dépensé en bien 3 rapporte plus d'utilité que le dernier euro dépensé dans les autres biens. À l'opposé, le dernier euro dépensé en bien 2 est celui qui rapporte le moins. Le panier n'est donc pas correctement arbitré.

4. Détermination du panier optimal. Étape 1 : écrire les conditions marginales d'optimalité.

Comme la solution optimale est intérieure, on doit avoir

$$\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} = \frac{Um_3}{p_3} = \frac{Um_4}{p_4}.$$

Compte tenu des utilités marginales calculées ci-dessus, cela donne :

$$\frac{2/c_1}{2} = \frac{3/c_2}{3} = \frac{1/c_3}{4} = \frac{4/c_4}{5}.$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_2} = \frac{1}{4c_3} = \frac{4}{5c_4}.$$

Étape 2 : en déduire les relations entre les consommations.

Commençons par comparer les deux premiers termes :

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_2}.$$

Comme $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, on en déduit

$$\boxed{c_1 = c_2.}$$

Comparons ensuite

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{4c_3}.$$

On obtient

$$4c_3 = c_1,$$

soit

$$\boxed{c_3 = \frac{1}{4}c_1.}$$

Enfin, comparons

$$\frac{1}{c_1} = \frac{4}{5c_4}.$$

Par produit en croix :

$$5c_4 = 4c_1.$$

On en déduit

$$\boxed{c_4 = \frac{4}{5}c_1.}$$

Nous avons ainsi exprimé toutes les consommations en fonction de c_1 :

$$c_2 = c_1, \qquad c_3 = \frac{1}{4}c_1, \qquad c_4 = \frac{4}{5}c_1.$$

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire.

La contrainte budgétaire est

$$2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + 5c_4 = 600.$$

On remplace c_2, c_3 et c_4 par les expressions obtenues :

$$2c_1 + 3c_1 + 4\left(\frac{1}{4}c_1\right) + 5\left(\frac{4}{5}c_1\right) = 600.$$

Calculons chaque terme :

$$4\left(\frac{1}{4}c_1\right) = c_1, \qquad 5\left(\frac{4}{5}c_1\right) = 4c_1.$$

Donc

$$2c_1 + 3c_1 + c_1 + 4c_1 = 600.$$

Ainsi,

$$10c_1 = 600.$$

On en déduit

$$c_1 = 60.$$

Étape 4 : calculer les autres consommations.

Comme

$$c_2 = c_1,$$

on obtient

$$c_2 = 60.$$

Comme

$$c_3 = \frac{1}{4}c_1,$$

on obtient

$$c_3 = \frac{1}{4} \times 60 = 15.$$

Comme

$$c_4 = \frac{4}{5}c_1,$$

on obtient

$$c_4 = \frac{4}{5} \times 60 = 48.$$

Conclusion. Le panier optimal est

$$\boxed{(c_1^*, c_2^*, c_3^*, c_4^*) = (60, 60, 15, 48).}$$

5. Vérification finale. Vérifions d'abord la contrainte budgétaire :

$$2 \times 60 + 3 \times 60 + 4 \times 15 + 5 \times 48.$$

Calculons :

$$2 \times 60 = 120, \qquad 3 \times 60 = 180, \qquad 4 \times 15 = 60, \qquad 5 \times 48 = 240.$$

Ainsi,

$$120 + 180 + 60 + 240 = 600.$$

La contrainte budgétaire est bien satisfaite.

Vérifions ensuite les utilités marginales par euro dépensé :

$$Um_1 = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}, \qquad Um_2 = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}, \qquad Um_3 = \frac{1}{15}, \qquad Um_4 = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}.$$

Donc

$$\frac{Um_1}{p_1} = \frac{1/30}{2} = \frac{1}{60},$$
$$\frac{Um_2}{p_2} = \frac{1/20}{3} = \frac{1}{60},$$
$$\frac{Um_3}{p_3} = \frac{1/15}{4} = \frac{1}{60},$$
$$\frac{Um_4}{p_4} = \frac{1/12}{5} = \frac{1}{60}.$$

On a bien

$$\boxed{\frac{Um_1}{p_1} = \frac{Um_2}{p_2} = \frac{Um_3}{p_3} = \frac{Um_4}{p_4}.}$$

Le panier trouvé est donc bien l'optimum intérieur recherché.

6. Effet d'une multiplication de tous les prix et du revenu par 2**.** Les nouveaux prix sont

$$p'_1 = 4, \qquad p'_2 = 6, \qquad p'_3 = 8, \qquad p'_4 = 10,$$

et le nouveau revenu est

$$m' = 1200.$$

Rappel de cours. Les demandes walrassiennes sont homogènes de degré 0 en prix et revenu.

Cela signifie que, pour tout $\lambda > 0$,

$$x(\lambda p, \lambda m) = x(p, m).$$

Ici, tous les prix et le revenu ont été multipliés par le même facteur $\lambda = 2$. Le panier optimal ne change donc pas.

Conclusion. Le nouveau panier optimal est inchangé :

$$\boxed{(c_1^{*\prime}, c_2^{*\prime}, c_3^{*\prime}, c_4^{*\prime}) = (60, 60, 15, 48).}$$

Interprétation économique. Multiplier tous les prix et le revenu par un même facteur ne modifie ni les prix relatifs, ni le pouvoir d'achat réel du consommateur. Il n'y a donc aucun effet sur le choix optimal. C'est l'expression de l'absence d'illusion monétaire.

Réponse finale.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Le panier } (50, 70, 10, 50) \text{ est budgétairement admissible, mais il n'est pas optimal.} \\ \text{Le consommateur doit augmenter } c_1 \text{ et } c_3, \text{ et diminuer } c_2 \text{ et } c_4. \\ \text{Le panier optimal est } (60, 60, 15, 48). \\ \text{Si tous les prix et le revenu sont multipliés par } 2, \text{ le panier optimal est inchangé.} \end{array}}$$

Corrigé de l'exercice 3

On considère le problème de choix du consommateur :

$$\max_{c_1, c_2 > 0} u(c_1, c_2) = c_1^3 c_2^2$$

sous la contrainte budgétaire

$$8c_1 + 4c_2 = 600$$

dans la première partie de l'exercice.

Comme les préférences sont strictement croissantes en chacun des deux biens, la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum.

1. Vérification de l'admissibilité budgétaire du panier proposé. On considère le panier

$$\bar{c} = (30, 90).$$

Sa dépense totale vaut

$$8 \times 30 + 4 \times 90.$$

Calculons :

$$8 \times 30 = 240, \qquad 4 \times 90 = 360.$$

Donc

$$240 + 360 = 600.$$

Ainsi,

$$8\bar{c}_1 + 4\bar{c}_2 = 600 = m.$$

Conclusion. Le panier $(30, 90)$ est bien **budgétairement admissible**.

2. Test d'optimalité du panier proposé. **Rappel de cours.** Dans le cas d'un optimum intérieur à deux biens, la condition marginale d'optimalité s'écrit

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2},$$

ou, de manière équivalente,

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{p_1}{p_2}, \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{\mathrm{Um}_1}{\mathrm{Um}_2}.$$

Cela signifie que le dernier euro dépensé dans chacun des deux biens doit procurer le même supplément d'utilité.

Calcul des utilités marginales. La fonction d'utilité est

$$u(c_1, c_2) = c_1^3 c_2^2.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Um}_1 = \frac{\partial u}{\partial c_1} = 3c_1^2 c_2^2,$$

$$\mathrm{Um}_2 = \frac{\partial u}{\partial c_2} = 2c_1^3 c_2.$$

Le taux marginal de substitution vaut donc

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{\mathrm{Um}_1}{\mathrm{Um}_2} = \frac{3c_1^2 c_2^2}{2c_1^3 c_2} = \frac{3}{2}\frac{c_2}{c_1}.$$

Évaluation au panier $(30, 90)$**.** On obtient :

$$\mathrm{TMS}_{1,2}(\bar{c}) = \frac{3}{2}\frac{90}{30} = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Le prix relatif des biens vaut

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Comme
$$\mathrm{TMS}_{1,2}(\bar{c}) = 4{,}5 \neq 2 = \frac{p_1}{p_2},$$
la condition de tangence n'est pas satisfaite.

Le panier proposé n'est donc **pas optimal**.

Même conclusion par les utilités marginales par euro dépensé. Calculons d'abord les utilités marginales au panier $(30, 90)$.

Pour le bien 1,
$$\mathrm{Um}_1(\bar{c}) = 3 \times 30^2 \times 90^2.$$

Or
$$30^2 = 900, \qquad 90^2 = 8100, \qquad 900 \times 8100 = 7\,290\,000,$$

d'où
$$\mathrm{Um}_1(\bar{c}) = 3 \times 7\,290\,000 = 21\,870\,000.$$

Pour le bien 2,
$$\mathrm{Um}_2(\bar{c}) = 2 \times 30^3 \times 90.$$

Or
$$30^3 = 27\,000, \qquad 27\,000 \times 90 = 2\,430\,000,$$

donc
$$\mathrm{Um}_2(\bar{c}) = 2 \times 2\,430\,000 = 4\,860\,000.$$

Les utilités marginales par euro dépensé valent alors :
$$\frac{\mathrm{Um}_1(\bar{c})}{p_1} = \frac{21\,870\,000}{8} = 2\,733\,750,$$
$$\frac{\mathrm{Um}_2(\bar{c})}{p_2} = \frac{4\,860\,000}{4} = 1\,215\,000.$$

Ainsi,
$$\frac{\mathrm{Um}_1(\bar{c})}{p_1} > \frac{\mathrm{Um}_2(\bar{c})}{p_2}.$$
Le bien 1 procure davantage d'utilité par euro dépensé que le bien 2.

On retrouve bien que le panier n'est pas optimal.

3. Sens de modification du panier. Puisque
$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} > \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2},$$
le consommateur a intérêt à transférer une partie de sa dépense vers le bien 1.

Autrement dit, il doit :

$$\boxed{\text{augmenter } c_1 \text{ et diminuer } c_2.}$$

Interprétation via le TMS**.** Comme

$$\mathrm{TMS}_{1,2}(\bar{c}) = 4{,}5 > \frac{p_1}{p_2} = 2,$$

le consommateur valorise relativement davantage le bien 1 que ne le fait le marché au panier considéré. Il souhaite donc substituer du bien 1 au bien 2.

4. Détermination du panier optimal pour $(p_1, p_2) = (8, 4)$ **et** $m = 600$**. Étape 1 : condition marginale d'optimalité.**

À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Comme

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{3}{2}\frac{c_2}{c_1},$$

on obtient

$$\frac{3}{2}\frac{c_2}{c_1} = \frac{8}{4} = 2.$$

On résout cette relation :

$$\frac{3}{2}\frac{c_2}{c_1} = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 3c_2 = 4c_1.$$

Donc

$$\boxed{c_2 = \frac{4}{3}c_1.}$$

Étape 2 : utilisation de la contrainte budgétaire.

La contrainte budgétaire s'écrit

$$8c_1 + 4c_2 = 600.$$

On remplace c_2 par $\frac{4}{3}c_1$:

$$8c_1 + 4\left(\frac{4}{3}c_1\right) = 600.$$

Donc

$$8c_1 + \frac{16}{3}c_1 = 600.$$

On met au même dénominateur :

$$\frac{24}{3}c_1 + \frac{16}{3}c_1 = 600.$$

Ainsi,

$$\frac{40}{3}c_1 = 600.$$

On en déduit

$$c_1 = 600 \times \frac{3}{40} = 45.$$

Étape 3 : calcul de c_2.

Comme

$$c_2 = \frac{4}{3}c_1,$$

on obtient

$$c_2 = \frac{4}{3} \times 45 = 60.$$

Conclusion. Le panier optimal initial est

$$\boxed{(c_1^*, c_2^*) = (45, 60).}$$

5. Détermination du nouveau panier optimal pour $(p_1', p_2') = (12, 3)$ et $m = 600$. Le nouveau problème du consommateur est :

$$\max_{c_1, c_2 > 0} c_1^3 c_2^2$$

sous la contrainte

$$12c_1 + 3c_2 = 600.$$

Étape 1 : nouvelle condition marginale d'optimalité.

Le TMS n'a pas changé, car les préférences n'ont pas changé :

$$\text{TMS}_{1,2} = \frac{3}{2}\frac{c_2}{c_1}.$$

À l'optimum, il faut donc

$$\frac{3}{2}\frac{c_2}{c_1} = \frac{12}{3} = 4.$$

On résout :

$$\frac{3}{2}\frac{c_2}{c_1} = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad 3c_2 = 8c_1.$$

Donc

$$\boxed{c_2 = \frac{8}{3}c_1.}$$

Étape 2 : utilisation de la nouvelle contrainte budgétaire.

On remplace dans

$$12c_1 + 3c_2 = 600.$$

Cela donne

$$12c_1 + 3\left(\frac{8}{3}c_1\right) = 600.$$

Donc

$$12c_1 + 8c_1 = 600.$$

Ainsi,

$$20c_1 = 600,$$

d'où

$$c_1 = 30.$$

Étape 3 : calcul de c_2.

Comme

$$c_2 = \frac{8}{3}c_1,$$

on obtient

$$c_2 = \frac{8}{3} \times 30 = 80.$$

Conclusion. Le nouveau panier optimal est

$$\boxed{(c_1^{*\prime}, c_2^{*\prime}) = (30, 80).}$$

6. Comparaison des deux paniers optimaux et commentaire économique. Le panier optimal initial était

$$(45, 60),$$

et le nouveau panier optimal est

$$(30, 80).$$

On observe donc :

$$c_1 \text{ diminue de 45 à 30}, \qquad c_2 \text{ augmente de 60 à 80}.$$

Interprétation économique. Le prix du bien 1 a augmenté, puisqu'il est passé de

$$8 \text{ à } 12,$$

tandis que le prix du bien 2 a diminué, puisqu'il est passé de

$$4 \text{ à } 3.$$

Le bien 1 est donc devenu relativement plus cher que le bien 2. En effet, le prix relatif est passé de

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{8}{4} = 2$$

à

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{12}{3} = 4.$$

Comme l'optimum intérieur vérifie

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{p_1}{p_2},$$

le consommateur doit désormais choisir un panier pour lequel le taux marginal de substitution est plus élevé. Or, dans ce modèle,

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{3}{2}\frac{c_2}{c_1}.$$

Pour que ce rapport augmente, il faut que le rapport

$$\frac{c_2}{c_1}$$

augmente lui aussi. C'est exactement ce qui se produit :

$$\frac{60}{45} = \frac{4}{3} \qquad \text{devient} \qquad \frac{80}{30} = \frac{8}{3}.$$

Le consommateur substitue donc du bien 2 au bien 1, ce qui est conforme à l'intuition économique : le bien 1 étant devenu relativement plus cher, il est moins consommé, tandis que le bien 2, devenu relativement moins cher, est davantage consommé.

Vérification finale. **Premier optimum.** Pour $(45, 60)$,

$$8 \times 45 + 4 \times 60 = 360 + 240 = 600.$$

De plus,

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{3}{2}\frac{60}{45} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2 = \frac{8}{4}.$$

Second optimum. Pour $(30, 80)$,

$$12 \times 30 + 3 \times 80 = 360 + 240 = 600.$$

Et

$$\mathrm{TMS}_{1,2} = \frac{3}{2}\frac{80}{30} = \frac{3}{2} \times \frac{8}{3} = 4 = \frac{12}{3}.$$

Les deux paniers obtenus satisfont donc bien les conditions d'optimalité intérieure dans chacun des deux environnements de prix.

Réponse finale.

Le panier $(30, 90)$ est budgétairement admissible, mais il n'est pas optimal.
Le consommateur doit augmenter c_1 et diminuer c_2.
Le panier optimal initial est $(45, 60)$.
Après modification des prix, le nouveau panier optimal est $(30, 80)$.
Le consommateur substitue le bien 2 au bien 1, devenu relativement plus cher.

Corrigé de l'exercice 4

On considère le problème de choix du consommateur :

$$\max_{c_1,c_2,c_3>0} u(c_1, c_2, c_3) = \ln(c_1) + 2\ln(c_2) + 3\ln(c_3)$$

sous la contrainte budgétaire

$$c_1 + 2c_2 + 6c_3 = 360.$$

Comme les préférences sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^3_{++}$, la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum.

1. Vérification de l'admissibilité budgétaire du panier proposé. On considère le panier

$$\bar{c} = (40, 40, 40).$$

Sa dépense totale vaut

$$1 \times 40 + 2 \times 40 + 6 \times 40.$$

Calculons :

$$1 \times 40 = 40, \qquad 2 \times 40 = 80, \qquad 6 \times 40 = 240.$$

Ainsi,

$$40 + 80 + 240 = 360.$$

Donc

$$\bar{c}_1 + 2\bar{c}_2 + 6\bar{c}_3 = 360 = m.$$

Conclusion. Le panier $(40, 40, 40)$ est bien **budgétairement admissible**.

2. Test d'optimalité du panier proposé. **Rappel de cours.** Dans le cas d'un optimum intérieur portant sur trois biens, la condition marginale d'optimalité s'écrit

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3}.$$

Autrement dit, le dernier euro dépensé dans chacun des trois biens doit procurer le même supplément d'utilité.

Calcul des utilités marginales. La fonction d'utilité est

$$u(c_1, c_2, c_3) = \ln(c_1) + 2\ln(c_2) + 3\ln(c_3).$$

On en déduit :

$$\mathrm{Um}_1 = \frac{1}{c_1}, \qquad \mathrm{Um}_2 = \frac{2}{c_2}, \qquad \mathrm{Um}_3 = \frac{3}{c_3}.$$

Évaluation au panier $(40, 40, 40)$**.** On obtient :

$$\mathrm{Um}_1(\bar{c}) = \frac{1}{40}, \qquad \mathrm{Um}_2(\bar{c}) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}, \qquad \mathrm{Um}_3(\bar{c}) = \frac{3}{40}.$$

Les utilités marginales par euro dépensé valent donc :

$$\frac{\mathrm{Um}_1(\bar{c})}{p_1} = \frac{1/40}{1} = \frac{1}{40},$$

$$\frac{\mathrm{Um}_2(\bar{c})}{p_2} = \frac{1/20}{2} = \frac{1}{40},$$

$$\frac{\mathrm{Um}_3(\bar{c})}{p_3} = \frac{3/40}{6} = \frac{1}{80}.$$

On obtient ainsi

$$\frac{\mathrm{Um}_1(\bar{c})}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2(\bar{c})}{p_2} = \frac{1}{40} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{Um}_3(\bar{c})}{p_3} = \frac{1}{80}.$$

Les trois rapports ne sont donc pas égaux.

Conclusion. Le panier $(40, 40, 40)$ n'est **pas optimal**.

3. Sens de modification du panier. On a

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} > \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3}.$$

Cela signifie qu'au voisinage du panier proposé, un euro supplémentaire dépensé dans le bien 1 ou dans le bien 2 rapporte davantage d'utilité qu'un euro supplémentaire dépensé dans le bien 3.

Le consommateur a donc intérêt à transférer une partie de sa dépense du bien 3 vers les biens 1 et 2.

Conclusion. Le consommateur doit :

$$\boxed{\text{augmenter } c_1 \text{ et } c_2, \qquad \text{diminuer } c_3.}$$

Interprétation économique. Le bien 3 est ici relativement surconsommé au regard du critère marginal, alors que les biens 1 et 2 sont relativement sous-consommés.

4. Détermination du panier optimal. Étape 1 : écrire les conditions marginales d'optimalité.

À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3}.$$

En remplaçant par les expressions des utilités marginales, on obtient :

$$\frac{1/c_1}{1} = \frac{(2/c_2)}{2} = \frac{(3/c_3)}{6}.$$

Cela se simplifie en

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_2} = \frac{1}{2c_3}.$$

Étape 2 : en déduire les relations entre les consommations.

Comparons d'abord les deux premiers termes :

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_2}.$$

Comme $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, on en déduit

$$\boxed{c_1 = c_2.}$$

Comparons ensuite le premier et le troisième terme :

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{2c_3}.$$

On obtient

$$2c_3 = c_1.$$

Donc

$$\boxed{c_3 = \frac{1}{2}c_1.}$$

Nous avons ainsi exprimé toutes les consommations en fonction de c_1 :

$$c_2 = c_1, \qquad c_3 = \frac{1}{2}c_1.$$

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire.

La contrainte budgétaire est

$$c_1 + 2c_2 + 6c_3 = 360.$$

En remplaçant c_2 et c_3, on obtient :

$$c_1 + 2c_1 + 6\left(\frac{1}{2}c_1\right) = 360.$$

Calculons :

$$6\left(\frac{1}{2}c_1\right) = 3c_1.$$

Donc

$$c_1 + 2c_1 + 3c_1 = 360.$$

Ainsi,

$$6c_1 = 360.$$

On en déduit

$$c_1 = 60.$$

Étape 4 : calculer les autres consommations.

Comme

$$c_2 = c_1,$$

on obtient

$$c_2 = 60.$$

Comme

$$c_3 = \frac{1}{2}c_1,$$

on obtient

$$c_3 = 30.$$

Conclusion. Le panier optimal est

$$\boxed{(c_1^*, c_2^*, c_3^*) = (60, 60, 30).}$$

5. Effet d'une augmentation du revenu à prix inchangés. Le revenu devient

$$m' = 540,$$

tandis que les prix restent égaux à

$$p_1 = 1, \qquad p_2 = 2, \qquad p_3 = 6.$$

Rappel de cours. Dans les cas d'utilité logarithmique pondérée, les demandes optimales sont proportionnelles au revenu. À prix donnés, si le revenu est multiplié par un certain facteur, les consommations optimales sont multipliées par ce même facteur.

Autrement dit, pour des prix fixés,

$$x(p, m) = m\, x(p, 1).$$

Ici, le revenu passe de

$$360 \text{ à } 540.$$

Le facteur multiplicatif est donc

$$\frac{540}{360} = \frac{3}{2}.$$

Le nouveau panier optimal s'obtient donc en multipliant chaque composante du panier optimal initial par $\frac{3}{2}$:

$$c_1^{*\prime} = \frac{3}{2} \times 60 = 90,$$

$$c_2^{*\prime} = \frac{3}{2} \times 60 = 90,$$

$$c_3^{*\prime} = \frac{3}{2} \times 30 = 45.$$

Conclusion. Le nouveau panier optimal est

$$\boxed{(c_1^{*\prime}, c_2^{*\prime}, c_3^{*\prime}) = (90, 90, 45).}$$

6. Comparaison des deux paniers optimaux et interprétation économique. Le premier panier optimal est

$$(60, 60, 30),$$

et le second est

$$(90, 90, 45).$$

On observe que chaque quantité a été multipliée par

$$\frac{3}{2}.$$

Interprétation économique. Les prix n'ayant pas changé, les arbitrages relatifs du consommateur ne sont pas modifiés. Le rapport entre les consommations optimales reste donc inchangé :

$$c_1 = c_2 \qquad \text{et} \qquad c_3 = \frac{1}{2} c_1.$$

L'augmentation du revenu permet simplement d'atteindre une courbe d'indifférence plus élevée tout en conservant la même structure de consommation relative.

Autrement dit :

- les *proportions* optimales entre les biens restent inchangées ;
- les *niveaux* de consommation augmentent dans la même proportion que le revenu.

C'est une propriété caractéristique des préférences logarithmiques pondérées, plus généralement des préférences qui engendrent des parts budgétaires constantes.

Vérification finale. **Premier optimum.** Pour $(60, 60, 30)$,

$$60 + 2 \times 60 + 6 \times 30 = 60 + 120 + 180 = 360.$$

De plus,

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{1/60}{1} = \frac{1}{60},$$
$$\frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{(2/60)}{2} = \frac{1}{60},$$
$$\frac{\mathrm{Um}_3}{p_3} = \frac{(3/30)}{6} = \frac{1/10}{6} = \frac{1}{60}.$$

Second optimum. Pour $(90, 90, 45)$,

$$90 + 2 \times 90 + 6 \times 45 = 90 + 180 + 270 = 540.$$

Et

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{1/90}{1} = \frac{1}{90},$$
$$\frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{(2/90)}{2} = \frac{1}{90},$$
$$\frac{\mathrm{Um}_3}{p_3} = \frac{(3/45)}{6} = \frac{1/15}{6} = \frac{1}{90}.$$

Dans les deux cas, les conditions marginales d'optimalité sont bien vérifiées.

Réponse finale.

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{Le panier } (40, 40, 40) \text{ est budgétairement admissible, mais il n'est pas optimal.} \\
\text{Le consommateur doit augmenter } c_1 \text{ et } c_2, \text{ et diminuer } c_3. \\
\text{Le panier optimal initial est } (60, 60, 30). \\
\text{Lorsque le revenu passe à } 540, \text{ le nouveau panier optimal est } (90, 90, 45). \\
\text{Les consommations optimales sont multipliées par } \dfrac{3}{2}, \text{ comme le revenu.}
\end{array}}$$

Corrigé de l'exercice 5

On considère le problème de choix du consommateur :

$$\max_{c_1,c_2,c_3,c_4>0} u(c_1,c_2,c_3,c_4) = c_1^2 c_2 c_3^3 c_4$$

sous la contrainte budgétaire

$$2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + 6c_4 = 840.$$

Comme les préférences sont strictement croissantes en chacun des quatre biens, la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum.

1. Vérification de l'admissibilité budgétaire du panier proposé. On considère le panier

$$\bar{c} = (90, 40, 90, 30).$$

Sa dépense totale vaut

$$2 \times 90 + 3 \times 40 + 4 \times 90 + 6 \times 30.$$

Calculons terme à terme :

$$2 \times 90 = 180, \qquad 3 \times 40 = 120, \qquad 4 \times 90 = 360, \qquad 6 \times 30 = 180.$$

Ainsi,

$$180 + 120 + 360 + 180 = 840.$$

Donc

$$2\bar{c}_1 + 3\bar{c}_2 + 4\bar{c}_3 + 6\bar{c}_4 = 840 = m.$$

Conclusion. Le panier $\bar{c} = (90, 40, 90, 30)$ est bien **budgétairement admissible**.

2. Test d'optimalité du panier proposé. Rappel de cours. Dans le cas d'un optimum intérieur portant sur plusieurs biens, la condition marginale d'optimalité s'écrit

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3} = \frac{\mathrm{Um}_4}{p_4}.$$

Autrement dit, le dernier euro dépensé dans chacun des biens doit procurer le même supplément d'utilité.

On peut également raisonner à partir des taux marginaux de substitution, mais avec quatre biens il est plus commode de comparer directement les rapports

$$\frac{\mathrm{Um}_j}{p_j}.$$

Calcul des utilités marginales. La fonction d'utilité est

$$u(c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1^2 c_2 c_3^3 c_4.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Um}_1 = 2c_1 c_2 c_3^3 c_4,$$

$$\mathrm{Um}_2 = c_1^2 c_3^3 c_4,$$

$$\mathrm{Um}_3 = 3c_1^2 c_2 c_3^2 c_4,$$

$$\mathrm{Um}_4 = c_1^2 c_2 c_3^3.$$

Évaluation en $\bar{c} = (90, 40, 90, 30)$.

On pourrait remplacer directement les quantités dans les quatre expressions précédentes, mais cela conduirait à des nombres très grands. Il est plus élégant d'utiliser la structure Cobb–Douglas de la fonction d'utilité.

En effet, pour une utilité de la forme

$$u(c_1, \ldots, c_n) = c_1^{\alpha_1} \cdots c_n^{\alpha_n},$$

on a

$$\mathrm{Um}_j = \alpha_j \frac{u}{c_j}.$$

Ici, les exposants sont

$$\alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = 1, \qquad \alpha_3 = 3, \qquad \alpha_4 = 1.$$

Donc

$$\mathrm{Um}_1 = 2\frac{u}{c_1}, \qquad \mathrm{Um}_2 = \frac{u}{c_2}, \qquad \mathrm{Um}_3 = 3\frac{u}{c_3}, \qquad \mathrm{Um}_4 = \frac{u}{c_4}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{2u}{p_1 c_1}, \qquad \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{u}{p_2 c_2}, \qquad \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3} = \frac{3u}{p_3 c_3}, \qquad \frac{\mathrm{Um}_4}{p_4} = \frac{u}{p_4 c_4}.$$

Comme $u > 0$, il suffit de comparer les quantités

$$\frac{2}{p_1 c_1}, \qquad \frac{1}{p_2 c_2}, \qquad \frac{3}{p_3 c_3}, \qquad \frac{1}{p_4 c_4}.$$

Au panier $\bar{c} = (90, 40, 90, 30)$, on obtient :

$$\frac{2}{p_1 c_1} = \frac{2}{2 \times 90} = \frac{2}{180} = \frac{1}{90},$$

$$\frac{1}{p_2 c_2} = \frac{1}{3 \times 40} = \frac{1}{120},$$

$$\frac{3}{p_3c_3} = \frac{3}{4\times 90} = \frac{3}{360} = \frac{1}{120},$$
$$\frac{1}{p_4c_4} = \frac{1}{6\times 30} = \frac{1}{180}.$$

Ainsi,
$$\frac{\mathrm{Um}_1(\bar{c})}{p_1} > \frac{\mathrm{Um}_2(\bar{c})}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3(\bar{c})}{p_3} > \frac{\mathrm{Um}_4(\bar{c})}{p_4}.$$

Les quatre rapports ne sont pas égaux.

Conclusion. Le panier $\bar{c}$ n'est **pas optimal**.

3. Sens de modification du panier. On a

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} > \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3} > \frac{\mathrm{Um}_4}{p_4}.$$

Le bien 1 est donc celui qui procure, au voisinage du panier considéré, le plus d'utilité supplémentaire par euro dépensé. À l'inverse, le bien 4 est celui qui en procure le moins.

Le consommateur doit donc transférer une partie de sa dépense du bien 4 vers le bien 1.

On remarque en outre que les biens 2 et 3 sont déjà correctement arbitrés l'un par rapport à l'autre, puisque
$$\frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3}.$$
Ils ne sont donc pas ceux qui appellent en priorité une correction.

Conclusion. Le sens du réajustement est :

$$\boxed{\text{augmenter } c_1 \text{ et diminuer } c_4.}$$

Interprétation économique. Le panier proposé consacre trop de dépense au bien 4 et pas assez au bien 1, au regard du critère marginal d'optimalité.

4. Détermination du panier optimal. Étape 1 : écrire les conditions marginales d'optimalité.

À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3} = \frac{\mathrm{Um}_4}{p_4}.$$

En utilisant
$$\mathrm{Um}_1 = 2\frac{u}{c_1}, \qquad \mathrm{Um}_2 = \frac{u}{c_2}, \qquad \mathrm{Um}_3 = 3\frac{u}{c_3}, \qquad \mathrm{Um}_4 = \frac{u}{c_4},$$

on obtient

$$\frac{2u/c_1}{2} = \frac{u/c_2}{3} = \frac{3u/c_3}{4} = \frac{u/c_4}{6}.$$

Comme $u > 0$, on peut simplifier par u, ce qui donne

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{3c_2} = \frac{3}{4c_3} = \frac{1}{6c_4}.$$

Étape 2 : en déduire les relations entre les consommations.

Comparons d'abord les deux premiers termes :

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{3c_2}.$$

On en déduit

$$3c_2 = c_1,$$

soit

$$\boxed{c_2 = \frac{1}{3}c_1.}$$

Comparons ensuite le premier et le troisième terme :

$$\frac{1}{c_1} = \frac{3}{4c_3}.$$

Par produit en croix :

$$4c_3 = 3c_1.$$

Donc

$$\boxed{c_3 = \frac{3}{4}c_1.}$$

Enfin, comparons le premier et le quatrième terme :

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{6c_4}.$$

On obtient

$$6c_4 = c_1,$$

soit

$$\boxed{c_4 = \frac{1}{6}c_1.}$$

Nous avons ainsi exprimé toutes les consommations en fonction de c_1 :

$$c_2 = \frac{1}{3}c_1, \qquad c_3 = \frac{3}{4}c_1, \qquad c_4 = \frac{1}{6}c_1.$$

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire.

La contrainte budgétaire est

$$2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + 6c_4 = 840.$$

On remplace c_2, c_3 et c_4 :

$$2c_1 + 3\left(\frac{1}{3}c_1\right) + 4\left(\frac{3}{4}c_1\right) + 6\left(\frac{1}{6}c_1\right) = 840.$$

Calculons chaque terme :

$$3\left(\frac{1}{3}c_1\right) = c_1, \qquad 4\left(\frac{3}{4}c_1\right) = 3c_1, \qquad 6\left(\frac{1}{6}c_1\right) = c_1.$$

Donc

$$2c_1 + c_1 + 3c_1 + c_1 = 840.$$

Ainsi,

$$7c_1 = 840.$$

On en déduit

$$c_1 = 120.$$

Étape 4 : calculer les autres consommations.

Comme

$$c_2 = \frac{1}{3}c_1,$$

on obtient

$$c_2 = \frac{1}{3} \times 120 = 40.$$

Comme

$$c_3 = \frac{3}{4}c_1,$$

on obtient

$$c_3 = \frac{3}{4} \times 120 = 90.$$

Comme

$$c_4 = \frac{1}{6}c_1,$$

on obtient

$$c_4 = \frac{1}{6} \times 120 = 20.$$

Conclusion. Le panier optimal est

$$\boxed{(c_1^*, c_2^*, c_3^*, c_4^*) = (120, 40, 90, 20).}$$

5. Nouveau panier optimal lorsque p_4 devient égal à 3. Le nouveau vecteur de prix est

$$p_1 = 2, \qquad p_2 = 3, \qquad p_3 = 4, \qquad p_4' = 3,$$

et le revenu demeure

$$m = 840.$$

Le nouveau problème est donc :

$$\max_{c_1,c_2,c_3,c_4>0} c_1^2 c_2 c_3^3 c_4$$

sous la contrainte

$$2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + 3c_4 = 840.$$

Étape 1 : nouvelles conditions marginales d'optimalité.

On doit avoir

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{2} = \frac{\mathrm{Um}_2}{3} = \frac{\mathrm{Um}_3}{4} = \frac{\mathrm{Um}_4}{3}.$$

En simplifiant par u, comme précédemment, cela devient

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{3c_2} = \frac{3}{4c_3} = \frac{1}{3c_4}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 3c_2 = c_1 \qquad &\Longrightarrow \qquad c_2 = \frac{1}{3}c_1, \\ 4c_3 = 3c_1 \qquad &\Longrightarrow \qquad c_3 = \frac{3}{4}c_1, \\ 3c_4 = c_1 \qquad &\Longrightarrow \qquad c_4 = \frac{1}{3}c_1. \end{aligned}$$

Étape 2 : utiliser la nouvelle contrainte budgétaire.

On remplace dans

$$2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + 3c_4 = 840.$$

Cela donne

$$2c_1 + 3\left(\frac{1}{3}c_1\right) + 4\left(\frac{3}{4}c_1\right) + 3\left(\frac{1}{3}c_1\right) = 840.$$

Donc

$$2c_1 + c_1 + 3c_1 + c_1 = 840.$$

Ainsi,

$$7c_1 = 840.$$

On en déduit encore

$$c_1 = 120.$$

Par suite,

$$c_2 = \frac{1}{3} \times 120 = 40,$$

$$c_3 = \frac{3}{4} \times 120 = 90,$$

$$c_4 = \frac{1}{3} \times 120 = 40.$$

Conclusion. Le nouveau panier optimal est

$$\boxed{(c_1^{*\prime}, c_2^{*\prime}, c_3^{*\prime}, c_4^{*\prime}) = (120, 40, 90, 40).}$$

6. Comparaison des deux paniers optimaux et commentaire économique. Le premier panier optimal est

$$(120, 40, 90, 20),$$

et le second est

$$(120, 40, 90, 40).$$

On observe que :

$$c_1 \text{ ne change pas}, \qquad c_2 \text{ ne change pas}, \qquad c_3 \text{ ne change pas}, \qquad c_4 \text{ double.}$$

Interprétation économique. Le prix du bien 4 a été divisé par 2, puisqu'il est passé de

$$6 \text{ à } 3.$$

Dans ce type de préférences Cobb–Douglas, le consommateur consacre une part budgétaire constante à chaque bien. Ici, l'exposant du bien 4 vaut 1, et la somme des exposants vaut

$$2 + 1 + 3 + 1 = 7.$$

La part du revenu consacrée au bien 4 est donc

$$\frac{1}{7}.$$

Comme le revenu n'a pas changé, la dépense optimale consacrée au bien 4 reste égale à

$$\frac{1}{7} \times 840 = 120.$$

Lorsque le prix du bien 4 est égal à 6, cela donne

$$c_4 = \frac{120}{6} = 20.$$

Lorsque le prix du bien 4 devient égal à 3, on obtient

$$c_4 = \frac{120}{3} = 40.$$

La quantité optimale du bien 4 double donc, tandis que les dépenses allouées aux autres biens et leurs prix restent inchangés. Les quantités optimales des autres biens restent alors inchangées.

Point conceptuel important. Le changement de prix du bien 4 modifie la quantité optimale achetée de ce bien, mais il ne modifie pas ici les dépenses optimales consacrées à chacun des biens, car celles-ci sont déterminées par des parts budgétaires fixes.

Vérification finale. **Premier optimum.** Pour $(120, 40, 90, 20)$,

$$2 \times 120 + 3 \times 40 + 4 \times 90 + 6 \times 20 = 240 + 120 + 360 + 120 = 840.$$

Second optimum. Pour $(120, 40, 90, 40)$,

$$2 \times 120 + 3 \times 40 + 4 \times 90 + 3 \times 40 = 240 + 120 + 360 + 120 = 840.$$

Dans les deux cas, les conditions budgétaires sont bien vérifiées, ainsi que les égalités des utilités marginales par euro dépensé.

Réponse finale.

Le panier $(90, 40, 90, 30)$ est budgétairement admissible, mais il n'est pas optimal.
Le consommateur doit augmenter c_1 et diminuer c_4.
Le panier optimal initial est $(120, 40, 90, 20)$.
Lorsque p_4 passe de 6 à 3, le nouveau panier optimal est $(120, 40, 90, 40)$.
La quantité optimale du bien 4 double, tandis que les autres quantités restent inchangées.

Corrigé de l'exercice 6

On considère le problème de choix du consommateur :

$$\max_{c_1, c_2, c_3, c_4 > 0} u(c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1^2 c_2 c_3 c_4^2$$

sous la contrainte budgétaire

$$qc_1 + 2qc_2 + 3qc_3 + 6qc_4 = 360q.$$

Comme les préférences sont strictement croissantes en chacun des biens, la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum.

1. Vérification de l'admissibilité budgétaire du panier proposé. On considère le panier

$$\bar{c} = (90, 30, 20, 25).$$

Sa dépense totale vaut

$$q \times 90 + 2q \times 30 + 3q \times 20 + 6q \times 25.$$

Calculons terme à terme :

$$q \times 90 = 90q, \qquad 2q \times 30 = 60q, \qquad 3q \times 20 = 60q, \qquad 6q \times 25 = 150q.$$

Ainsi,

$$90q + 60q + 60q + 150q = 360q.$$

Donc

$$q\bar{c}_1 + 2q\bar{c}_2 + 3q\bar{c}_3 + 6q\bar{c}_4 = 360q = m.$$

Conclusion. Le panier $(90, 30, 20, 25)$ est bien **budgétairement admissible** pour tout $q > 0$.

2. Test d'optimalité du panier proposé. Rappel de cours. Dans le cas d'un optimum intérieur portant sur plusieurs biens, la condition marginale d'optimalité s'écrit

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3} = \frac{\mathrm{Um}_4}{p_4}.$$

Autrement dit, le dernier euro dépensé dans chacun des biens doit procurer le même supplément d'utilité.

Dans un problème à quatre biens, il est souvent commode de comparer directement les rapports

$$\frac{\mathrm{Um}_j}{p_j}.$$

Calcul des utilités marginales. La fonction d'utilité est

$$u(c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1^2 c_2 c_3 c_4^2.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Um}_1 = 2c_1 c_2 c_3 c_4^2,$$

$$\mathrm{Um}_2 = c_1^2 c_3 c_4^2,$$

$$\mathrm{Um}_3 = c_1^2 c_2 c_4^2,$$

$$\mathrm{Um}_4 = 2c_1^2c_2c_3c_4.$$

Simplification utile. Comme la fonction d'utilité est de type Cobb–Douglas, on peut écrire

$$\mathrm{Um}_1 = 2\frac{u}{c_1}, \qquad \mathrm{Um}_2 = \frac{u}{c_2}, \qquad \mathrm{Um}_3 = \frac{u}{c_3}, \qquad \mathrm{Um}_4 = 2\frac{u}{c_4}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{2u}{p_1c_1}, \qquad \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{u}{p_2c_2}, \qquad \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3} = \frac{u}{p_3c_3}, \qquad \frac{\mathrm{Um}_4}{p_4} = \frac{2u}{p_4c_4}.$$

Comme $u > 0$, il suffit de comparer les quantités suivantes :

$$\frac{2}{p_1c_1}, \qquad \frac{1}{p_2c_2}, \qquad \frac{1}{p_3c_3}, \qquad \frac{2}{p_4c_4}.$$

Évaluation au panier $\bar{c} = (90, 30, 20, 25)$. On obtient :

$$\frac{2}{p_1c_1} = \frac{2}{q \times 90} = \frac{1}{45q},$$

$$\frac{1}{p_2c_2} = \frac{1}{2q \times 30} = \frac{1}{60q},$$
$$\frac{1}{p_3c_3} = \frac{1}{3q \times 20} = \frac{1}{60q},$$
$$\frac{2}{p_4c_4} = \frac{2}{6q \times 25} = \frac{2}{150q} = \frac{1}{75q}.$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{Um}_1(\bar{c})}{p_1} > \frac{\mathrm{Um}_2(\bar{c})}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3(\bar{c})}{p_3} > \frac{\mathrm{Um}_4(\bar{c})}{p_4}.$$

Les quatre rapports ne sont donc pas égaux.

Conclusion. Le panier $\bar{c}$ n'est **pas optimal**.

3. Sens de modification du panier. Au panier proposé, le bien 1 est celui qui procure le plus d'utilité supplémentaire par euro dépensé, tandis que le bien 4 est celui qui en procure le moins.

En effet,

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} > \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3} > \frac{\mathrm{Um}_4}{p_4}.$$

Le consommateur doit donc transférer une partie de sa dépense du bien 4 vers le bien 1.

On remarque en outre que les biens 2 et 3 sont déjà correctement arbitrés l'un par rapport à l'autre, puisque

$$\frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3}.$$

Le réajustement principal concerne donc ici les biens 1 et 4.

Conclusion. Le consommateur doit :

$$\boxed{\text{augmenter } c_1 \text{ et diminuer } c_4.}$$

4. Détermination du panier optimal en fonction de q. Étape 1 : écrire les conditions marginales d'optimalité.

À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3}{p_3} = \frac{\mathrm{Um}_4}{p_4}.$$

En utilisant les expressions précédentes, cela donne :

$$\frac{2u/c_1}{q} = \frac{u/c_2}{2q} = \frac{u/c_3}{3q} = \frac{2u/c_4}{6q}.$$

Comme $u > 0$ et $q > 0$, on peut simplifier par u puis par q. On obtient :

$$\frac{2}{c_1} = \frac{1}{2c_2} = \frac{1}{3c_3} = \frac{1}{3c_4}.$$

Étape 2 : en déduire les relations entre les consommations.

Comparons d'abord les deux premiers termes :

$$\frac{2}{c_1} = \frac{1}{2c_2}.$$

Par produit en croix,

$$4c_2 = c_1.$$

Donc

$$\boxed{c_2 = \frac{1}{4}c_1.}$$

Comparons ensuite le premier et le troisième terme :

$$\frac{2}{c_1} = \frac{1}{3c_3}.$$

Par produit en croix,

$$6c_3 = c_1.$$

Donc

$$\boxed{c_3 = \frac{1}{6}c_1.}$$

Enfin, comparons le premier et le quatrième terme :

$$\frac{2}{c_1} = \frac{1}{3c_4}.$$

On obtient de même

$$6c_4 = c_1.$$

Donc

$$\boxed{c_4 = \frac{1}{6}c_1.}$$

Nous avons ainsi exprimé toutes les consommations en fonction de c_1 :

$$c_2 = \frac{1}{4}c_1, \qquad c_3 = \frac{1}{6}c_1, \qquad c_4 = \frac{1}{6}c_1.$$

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire.

La contrainte budgétaire est

$$qc_1 + 2qc_2 + 3qc_3 + 6qc_4 = 360q.$$

Comme $q > 0$, on peut diviser les deux membres par q. Il vient :

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 6c_4 = 360.$$

On remplace ensuite c_2, c_3 et c_4 par les relations obtenues :

$$c_1 + 2\left(\frac{1}{4}c_1\right) + 3\left(\frac{1}{6}c_1\right) + 6\left(\frac{1}{6}c_1\right) = 360.$$

Calculons chaque terme :

$$2\left(\frac{1}{4}c_1\right) = \frac{1}{2}c_1, \qquad 3\left(\frac{1}{6}c_1\right) = \frac{1}{2}c_1, \qquad 6\left(\frac{1}{6}c_1\right) = c_1.$$

Donc

$$c_1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_1 + c_1 = 360.$$

Ainsi,

$$3c_1 = 360.$$

On en déduit

$$c_1 = 120.$$

Étape 4 : calculer les autres consommations.

Comme

$$c_2 = \frac{1}{4}c_1,$$

on obtient

$$c_2 = \frac{1}{4} \times 120 = 30.$$

Comme

$$c_3 = \frac{1}{6}c_1,$$

on obtient

$$c_3 = \frac{1}{6} \times 120 = 20.$$

Et comme

$$c_4 = \frac{1}{6}c_1,$$

on obtient

$$c_4 = \frac{1}{6} \times 120 = 20.$$

Conclusion. Le panier optimal est

$$\boxed{(c_1^*, c_2^*, c_3^*, c_4^*) = (120, 30, 20, 20).}$$

5. Pourquoi ce panier optimal est-il indépendant de q ? Le panier optimal obtenu est

$$(120, 30, 20, 20),$$

et il ne dépend pas du paramètre q.

Première explication : par le calcul. Dans les conditions marginales d'optimalité, chaque prix contient le facteur commun q. Ce facteur se simplifie entièrement. De même, dans la contrainte budgétaire,

$$qc_1 + 2qc_2 + 3qc_3 + 6qc_4 = 360q,$$

on peut diviser par q, ce qui donne

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 6c_4 = 360.$$

Le problème du consommateur devient donc exactement le même que si

$$q = 1.$$

Deuxième explication : par l'homogénéité de degré 0. Les demandes walrassiennes sont homogènes de degré 0 en prix et revenu. Cela signifie que, pour tout $\lambda > 0$,

$$x(\lambda p, \lambda m) = x(p, m).$$

Ici, le vecteur de prix est

$$(q, 2q, 3q, 6q) = q(1, 2, 3, 6),$$

et le revenu vaut

$$m = 360q = q \times 360.$$

Autrement dit, prix et revenu sont tous multipliés par le même facteur q. Les demandes optimales ne peuvent donc pas changer.

Interprétation économique. Seuls les prix relatifs et le pouvoir d'achat réel importent. Le paramètre q ne fait que changer l'unité monétaire dans laquelle les prix et le revenu sont exprimés. Il n'affecte pas le choix réel du consommateur.

6. Nouveau panier optimal lorsque les prix deviennent $(q, q, 6q, 6q)$. Le nouveau vecteur de prix est

$$p'_1 = q, \qquad p'_2 = q, \qquad p'_3 = 6q, \qquad p'_4 = 6q,$$

et le revenu demeure

$$m = 360q.$$

Le nouveau problème du consommateur est donc :

$$\max_{c_1, c_2, c_3, c_4 > 0} c_1^2 c_2 c_3 c_4^2$$

sous la contrainte

$$qc_1 + qc_2 + 6qc_3 + 6qc_4 = 360q.$$

Étape 1 : nouvelles conditions marginales d'optimalité.

À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{Um}_1}{q} = \frac{\mathrm{Um}_2}{q} = \frac{\mathrm{Um}_3}{6q} = \frac{\mathrm{Um}_4}{6q}.$$

En remplaçant les utilités marginales par

$$\mathrm{Um}_1 = 2\frac{u}{c_1}, \qquad \mathrm{Um}_2 = \frac{u}{c_2}, \qquad \mathrm{Um}_3 = \frac{u}{c_3}, \qquad \mathrm{Um}_4 = 2\frac{u}{c_4},$$

puis en simplifiant par u et par q, on obtient

$$\frac{2}{c_1} = \frac{1}{c_2} = \frac{1}{6c_3} = \frac{2}{6c_4}.$$

Autrement dit,

$$\frac{2}{c_1} = \frac{1}{c_2} = \frac{1}{6c_3} = \frac{1}{3c_4}.$$

Étape 2 : en déduire les relations entre les consommations.

Comparons les deux premiers termes :

$$\frac{2}{c_1} = \frac{1}{c_2}.$$

On en déduit

$$c_1 = 2c_2,$$

soit

$$\boxed{c_2 = \frac{1}{2}c_1.}$$

Comparons le premier et le troisième terme :

$$\frac{2}{c_1} = \frac{1}{6c_3}.$$

Par produit en croix,

$$12c_3 = c_1.$$

Donc

$$\boxed{c_3 = \frac{1}{12}c_1.}$$

Comparons enfin le premier et le quatrième terme :

$$\frac{2}{c_1} = \frac{1}{3c_4}.$$

On obtient

$$6c_4 = c_1.$$

Donc

$$\boxed{c_4 = \frac{1}{6}c_1.}$$

Nous avons ainsi :

$$c_2 = \frac{1}{2}c_1, \qquad c_3 = \frac{1}{12}c_1, \qquad c_4 = \frac{1}{6}c_1.$$

Étape 3 : utiliser la nouvelle contrainte budgétaire.

La contrainte budgétaire est

$$qc_1 + qc_2 + 6qc_3 + 6qc_4 = 360q.$$

Comme $q > 0$, on divise par q :

$$c_1 + c_2 + 6c_3 + 6c_4 = 360.$$

En remplaçant :

$$c_1 + \frac{1}{2}c_1 + 6\left(\frac{1}{12}c_1\right) + 6\left(\frac{1}{6}c_1\right) = 360.$$

Calculons :

$$6\left(\frac{1}{12}c_1\right) = \frac{1}{2}c_1, \qquad 6\left(\frac{1}{6}c_1\right) = c_1.$$

Donc

$$c_1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_1 + c_1 = 360.$$

Ainsi,

$$3c_1 = 360.$$

D'où

$$c_1 = 120.$$

Étape 4 : calculer les autres consommations.

Comme

$$c_2 = \frac{1}{2}c_1,$$

on obtient

$$c_2 = \frac{1}{2} \times 120 = 60.$$

Comme

$$c_3 = \frac{1}{12}c_1,$$

on obtient

$$c_3 = \frac{1}{12} \times 120 = 10.$$

Comme

$$c_4 = \frac{1}{6}c_1,$$

on obtient

$$c_4 = \frac{1}{6} \times 120 = 20.$$

Conclusion. Le nouveau panier optimal est

$$\boxed{(c_1^{*\prime}, c_2^{*\prime}, c_3^{*\prime}, c_4^{*\prime}) = (120, 60, 10, 20).}$$

7. Comparaison des deux paniers optimaux et commentaire économique. Le premier panier optimal était

$$(120, 30, 20, 20),$$

et le second est

$$(120, 60, 10, 20).$$

On observe donc que :

$$c_1 \text{ est inchangé}, \qquad c_2 \text{ double}, \qquad c_3 \text{ est divisé par } 2, \qquad c_4 \text{ est inchangé}.$$

Interprétation économique. Par rapport à la situation initiale :

— le bien 2 devient relativement moins cher, puisque son prix passe de $2q$ à q ;

— le bien 3 devient relativement plus cher, puisque son prix passe de $3q$ à $6q$;

— les prix des biens 1 et 4 restent inchangés.

Comme les préférences sont de type Cobb–Douglas, le consommateur consacre des parts budgétaires constantes à chaque bien. La somme des exposants vaut

$$2 + 1 + 1 + 2 = 6.$$

Les parts budgétaires sont donc :

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ pour le bien 1}, \qquad \frac{1}{6} \text{ pour le bien 2}, \qquad \frac{1}{6} \text{ pour le bien 3}, \qquad \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ pour le bien 4}.$$

Le revenu étant inchangé, les dépenses optimales consacrées à chacun des biens restent :

$$\frac{1}{3} \times 360q = 120q \text{ pour le bien 1},$$

$$\frac{1}{6} \times 360q = 60q \text{ pour le bien 2},$$

$$\frac{1}{6} \times 360q = 60q \text{ pour le bien 3},$$

$$\frac{1}{3} \times 360q = 120q \text{ pour le bien 4}.$$

Dès lors :

$$c_2 = \frac{60q}{q} = 60 \qquad \text{au lieu de} \qquad \frac{60q}{2q} = 30,$$

si bien que c_2 double,

et

$$c_3 = \frac{60q}{6q} = 10 \qquad \text{au lieu de} \qquad \frac{60q}{3q} = 20,$$

si bien que c_3 est divisé par 2.

En revanche, comme les prix des biens 1 et 4 n'ont pas changé, leurs quantités optimales restent inchangées.

Vérification finale. **Premier optimum.** Pour $(120, 30, 20, 20)$,

$$q \times 120 + 2q \times 30 + 3q \times 20 + 6q \times 20 = 120q + 60q + 60q + 120q = 360q.$$

Second optimum. Pour $(120, 60, 10, 20)$,

$$q \times 120 + q \times 60 + 6q \times 10 + 6q \times 20 = 120q + 60q + 60q + 120q = 360q.$$

Dans les deux cas, la contrainte budgétaire est bien satisfaite et les utilités marginales par euro dépensé sont bien égales.

Réponse finale.

Le panier $(90, 30, 20, 25)$ est budgétairement admissible, mais il n'est pas optimal.

Le consommateur doit augmenter c_1 et diminuer c_4.

Le panier optimal initial est $(120, 30, 20, 20)$.

Ce panier est indépendant de q, par homogénéité de degré 0 des demandes.

Avec les nouveaux prix $(q, q, 6q, 6q)$, le nouveau panier optimal est $(120, 60, 10, 20)$.

Le bien 2 est davantage consommé car il devient relativement moins cher, tandis que le bien 3 est moins cons

3 Théorie du producteur

3.1 Rappels théoriques

1. Le problème du producteur

On considère une entreprise qui produit un bien homogène en utilisant n facteurs de production. Les quantités de facteurs sont notées

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+,$$

et la quantité produite est donnée par une fonction de production

$$q = f(x_1, \dots, x_n).$$

Les prix des facteurs sont notés

$$w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n_{++}.$$

Dans tout ce recueil, on se place dans le cadre de la **concurrence pure et parfaite**, sans temps, sans incertitude, et l'on suppose que les solutions étudiées sont **intérieures**. Cela signifie que, dans les exercices, les quantités optimales de facteurs vérifient

$$x_j > 0 \qquad \text{pour tout } j = 1, \dots, n.$$

La théorie statique du producteur repose sur deux problèmes fondamentaux :

— la **minimisation du coût** pour produire une quantité donnée ;
— la **maximisation du profit** lorsque le prix du bien produit est donné.

2. Le programme de minimisation des coûts

Pour produire une quantité donnée $\bar{q} > 0$, l'entreprise choisit ses facteurs de manière à minimiser son coût total :

$$\min_{x_1, \dots, x_n \geq 0} \; w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n$$

sous la contrainte technologique

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq \bar{q}.$$

Principe fondamental. Si la fonction de production est croissante en chacun des facteurs, il n'est jamais optimal de produire strictement plus que la quantité demandée. En effet, cela nécessiterait une dépense inutile.

La contrainte technologique est donc **saturée** à l'optimum :

$$\boxed{f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{q}.}$$

Dans le cas de deux facteurs x_1 et x_2, le programme devient

$$\min_{x_1, x_2 \geq 0} \; w_1 x_1 + w_2 x_2$$

sous la contrainte

$$f(x_1, x_2) = \bar{q}.$$

Dans le cas de trois facteurs x_1, x_2, x_3,

$$\min_{x_1, x_2, x_3 \geq 0} \; w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3$$

sous la contrainte

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{q}.$$

3. Productivités marginales et interprétation économique

La productivité marginale du facteur j est définie par

$$\mathrm{Pm}_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}.$$

Elle mesure l'augmentation de la production résultant d'une très légère augmentation du facteur j, tous les autres facteurs étant maintenus constants.

Le rapport

$$\frac{\mathrm{Pm}_j}{w_j}$$

mesure la **production marginale par euro dépensé** dans le facteur j.

Interprétation économique. Si, pour deux facteurs i et j,

$$\frac{\mathrm{Pm}_i}{w_i} > \frac{\mathrm{Pm}_j}{w_j},$$

alors un euro supplémentaire dépensé dans le facteur i procure plus de production qu'un euro supplémentaire dépensé dans le facteur j.

À production donnée, l'entreprise peut alors réduire son coût en :

$$\boxed{\text{augmentant } x_i \text{ et diminuant } x_j.}$$

À l'optimum intérieur de coût minimal, les productions marginales par euro dépensé doivent être égales :

$$\boxed{\frac{\mathrm{Pm}_1}{w_1} = \frac{\mathrm{Pm}_2}{w_2} = \cdots = \frac{\mathrm{Pm}_n}{w_n}.}$$

C'est la condition marginale fondamentale de minimisation des coûts.

4. Le taux marginal de substitution technique

Dans le cas de deux facteurs x_1 et x_2, on définit le taux marginal de substitution technique du facteur 1 au facteur 2 par

$$\mathrm{TMST}_{1,2} = \frac{\mathrm{Pm}_1}{\mathrm{Pm}_2}.$$

Le $\mathrm{TMST}_{1,2}$ mesure la quantité du facteur 2 que l'entreprise peut économiser lorsqu'elle augmente légèrement le facteur 1, à production constante.

À l'optimum intérieur de minimisation des coûts, on a

$$\frac{\mathrm{Pm}_1}{w_1} = \frac{\mathrm{Pm}_2}{w_2}.$$

Cette relation se réécrit

$$\frac{\mathrm{Pm}_1}{\mathrm{Pm}_2} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{TMST}_{1,2} = \frac{w_1}{w_2}.}$$

Interprétation économique. Le taux auquel la technologie permet de substituer un facteur à l'autre doit être égal au taux auquel le marché échange ces deux facteurs.

Si

$$\mathrm{TMST}_{1,2} > \frac{w_1}{w_2},$$

alors le facteur 1 est technologiquement trop performant relativement à son coût. L'entreprise doit augmenter x_1 et réduire x_2.

À l'inverse, si

$$\mathrm{TMST}_{1,2} < \frac{w_1}{w_2},$$

elle doit diminuer x_1 et augmenter x_2.

5. Cas à trois facteurs

Lorsque l'entreprise utilise trois facteurs x_1, x_2, x_3, la logique économique est exactement la même que dans le cas à deux facteurs. À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\boxed{\frac{\mathrm{Pm}_1}{w_1} = \frac{\mathrm{Pm}_2}{w_2} = \frac{\mathrm{Pm}_3}{w_3}.}$$

Cela équivaut à deux égalités indépendantes, par exemple

$$\frac{\mathrm{Pm}_1}{\mathrm{Pm}_2} = \frac{w_1}{w_2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{Pm}_1}{\mathrm{Pm}_3} = \frac{w_1}{w_3}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{TMST}_{1,2} = \frac{w_1}{w_2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{TMST}_{1,3} = \frac{w_1}{w_3}.}$$

Point pédagogique important. Le passage de deux à trois facteurs ne modifie pas la structure du raisonnement. Il faut simplement écrire et exploiter plusieurs relations marginales de même nature.

6. Méthode générale de résolution d'un problème de coût minimal

Dans les exercices de théorie du producteur, on procèdera systématiquement selon les étapes suivantes.

Étape 1. Écrire la contrainte technologique sous forme d'égalité :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bar{q}.$$

Étape 2. Calculer les productivités marginales

$$\mathrm{Pm}_1, \dots, \mathrm{Pm}_n.$$

Étape 3. Écrire les conditions marginales d'optimalité :

$$\frac{\mathrm{Pm}_1}{w_1} = \cdots = \frac{\mathrm{Pm}_n}{w_n}.$$

Étape 4. En déduire des relations entre les facteurs.

Étape 5. Reporter ces relations dans la contrainte technologique.

Étape 6. En déduire les demandes conditionnelles de facteurs, puis le coût total minimal.

Dans le cas de deux facteurs, cette méthode revient souvent à utiliser :

$$\boxed{\mathrm{TMST}_{1,2} = \frac{w_1}{w_2} \qquad \text{et} \qquad f(x_1, x_2) = \bar{q}.}$$

Dans le cas de trois facteurs :

$$\boxed{\frac{\mathrm{Pm}_1}{w_1} = \frac{\mathrm{Pm}_2}{w_2} = \frac{\mathrm{Pm}_3}{w_3} \qquad \text{et} \qquad f(x_1, x_2, x_3) = \bar{q}.}$$

7. Fonction de coût, coût moyen et coût marginal

La **fonction de coût total** est la dépense minimale nécessaire pour produire $\bar{q}$:

$$\boxed{C(\bar{q}, w) = \min_{x \geq 0} \{w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n \ ; \ f(x) \geq \bar{q}\} .}$$

Une fois cette fonction obtenue, on définit :

$$\boxed{CM(\bar{q}) = \frac{C(\bar{q}, w)}{\bar{q}}}$$

le **coût moyen**, et

$$\boxed{Cm(\bar{q}) = \frac{\partial C(\bar{q}, w)}{\partial \bar{q}}}$$

le **coût marginal**, lorsque la dérivée existe.

Interprétation économique.

— le coût moyen mesure le coût par unité produite ;

— le coût marginal mesure le coût d'une unité supplémentaire.

Dans un grand nombre d'exercices, le coût marginal est croissant lorsque la technologie présente des rendements décroissants à l'échelle, et constant lorsque la technologie présente des rendements constants à l'échelle.

8. Maximisation du profit et offre du producteur concurrentiel

Sous concurrence pure et parfaite, l'entreprise prend comme donné le prix $p > 0$ du bien qu'elle produit. Elle choisit la quantité q afin de maximiser son profit :

$$\pi(q) = pq - C(q, w).$$

Le programme du producteur s'écrit donc

$$\max_{q\geq 0}\ pq - C(q,w).$$

Lorsque la solution est intérieure et que la fonction de coût est dérivable, la condition d'optimalité s'écrit :

$$\boxed{p = Cm(q).}$$

Interprétation économique. L'entreprise augmente sa production tant que la recette procurée par une unité supplémentaire, c'est-à-dire p, est supérieure au coût supplémentaire, c'est-à-dire $Cm(q)$. À l'optimum, on doit avoir égalité entre les deux.

La **fonction d'offre** du producteur concurrentiel est donc obtenue en résolvant

$$\boxed{p = Cm(q)}$$

par rapport à q.

9. Formulation équivalente en facteurs

On peut aussi raisonner directement en facteurs. Le profit s'écrit alors

$$\pi(x) = pf(x) - w_1x_1 - \cdots - w_nx_n.$$

Dans une solution intérieure, les conditions marginales de maximisation du profit s'écrivent

$$\boxed{p\mathrm{Pm}_1 = w_1, \qquad p\mathrm{Pm}_2 = w_2, \qquad \ldots, \qquad p\mathrm{Pm}_n = w_n.}$$

Interprétation économique. La valeur de la productivité marginale de chaque facteur doit être égale à son prix.

Autrement dit, le dernier euro dépensé dans un facteur doit rapporter exactement un euro de recette supplémentaire.

En divisant par p, on obtient

$$\mathrm{Pm}_j = \frac{w_j}{p}.$$

En divisant deux conditions entre elles, on retrouve immédiatement

$$\frac{\mathrm{Pm}_i}{\mathrm{Pm}_j} = \frac{w_i}{w_j},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{TMST}_{i,j} = \frac{w_i}{w_j}.$$

10. Fonctions de production Cobb–Douglas

On rencontre très souvent des fonctions de production de type Cobb–Douglas :

$$f(x_1, \dots, x_n) = A x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad A > 0, \qquad \alpha_j > 0.$$

a) Productivités marginales. Pour chaque facteur j,

$$\mathrm{Pm}_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Dans le cas Cobb–Douglas, on obtient la relation très utile

$$\boxed{\mathrm{Pm}_j = \alpha_j \frac{q}{x_j}.}$$

Exemple. Si

$$q = K^{1/4} L^{1/2},$$

alors

$$\mathrm{Pm}_K = \frac{1}{4}\frac{q}{K}, \qquad \mathrm{Pm}_L = \frac{1}{2}\frac{q}{L}.$$

b) Taux marginal de substitution technique. Dans le cas Cobb–Douglas, on a

$$\mathrm{TMST}_{i,j} = \frac{\mathrm{Pm}_i}{\mathrm{Pm}_j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{x_j}{x_i}.$$

Ainsi, pour

$$q = K^{\alpha} L^{\beta},$$

on obtient

$$\boxed{\mathrm{TMST}_{K,L} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{L}{K}.}$$

c) Rendements à l'échelle. La somme des exposants

$$\rho = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

détermine les rendements à l'échelle :

$$\boxed{\begin{cases} \rho < 1 & \text{rendements décroissants à l'échelle,} \\ \rho = 1 & \text{rendements constants à l'échelle,} \\ \rho > 1 & \text{rendements croissants à l'échelle.} \end{cases}}$$

11. Théorème d'Euler, parts factorielles et profit

Si la fonction de production est homogène de degré ρ, le théorème d'Euler donne :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Pm}_j x_j = \rho q.}$$

En multipliant par le prix du bien p, on obtient

$$p \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Pm}_j x_j = \rho p q.$$

Or, en concurrence pure et parfaite, à l'optimum,

$$p\mathrm{Pm}_j = w_j.$$

Donc

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j = \rho p q.$$

Conclusion. Le coût factoriel total représente la part ρ du chiffre d'affaires, et le profit vaut

$$\pi = pq - \sum_{j=1}^{n} w_j x_j = (1-\rho) pq.$$

Ainsi,

$$\boxed{\pi = (1-\rho)pq} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{\pi}{pq} = 1-\rho.}$$

Cette relation est particulièrement utile dans les exercices.

En particulier :

- si $\rho = 1$, alors
$$\pi = 0;$$
- si $\rho < 1$, alors
$$\pi > 0;$$
- dans une fonction Cobb–Douglas, la part de chaque facteur dans le chiffre d'affaires est égale à son exposant.

Exemple. Si

$$q = K^{1/4} L^{1/2},$$

alors

$$rK = \frac{1}{4} pq, \qquad wL = \frac{1}{2} pq, \qquad \pi = \left(1 - \frac{3}{4}\right) pq = \frac{1}{4} pq.$$

12. Cas important des rendements constants à l'échelle

Si la fonction de production est homogène de degré 1, l'entreprise présente des rendements constants à l'échelle. Dans ce cas :

— le coût total est proportionnel à la production ;
— le coût moyen est constant ;
— le coût marginal est égal au coût moyen ;
— à l'équilibre concurrentiel, on a

$$p = CM = Cm;$$

— le profit est nul.

Interprétation économique. Lorsque doubler tous les facteurs double exactement la production, l'entreprise ne bénéficie ni d'un avantage ni d'un désavantage de taille. En concurrence parfaite, cette propriété conduit à l'annulation du profit.

13. Homogénéité et absence d'illusion nominale du côté du producteur

La fonction d'offre du producteur concurrentiel est homogène de degré 0 en tous les prix. Cela signifie que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\boxed{q^s(\lambda p, \lambda w) = q^s(p, w).}$$

De même, les demandes de facteurs issues de la maximisation du profit sont homogènes de degré 0 en tous les prix :

$$\boxed{x^*(\lambda p, \lambda w) = x^*(p, w).}$$

Interprétation économique. Si le prix du bien et tous les prix des facteurs sont multipliés par un même facteur, les choix réels de l'entreprise ne changent pas. Seuls les prix relatifs importent.

14. Sur le taux marginal de transformation

Dans les exercices de ce recueil, l'entreprise produit un **seul** bien à partir de plusieurs facteurs. Le taux marginal de transformation entre deux biens n'intervient donc pas directement.

Plus généralement, dans un cadre multi-produits, le TMT entre deux biens mesure le taux auquel la technologie permet de transformer la production d'un bien en production de l'autre. Dans le présent recueil, l'outil central de la théorie du producteur reste cependant le TMST, car il s'agit d'une théorie du producteur à un seul output et plusieurs inputs.

15. Synthèse des relations essentielles

Pour résoudre les exercices de théorie du producteur figurant dans ce recueil, les relations fondamentales à maîtriser sont les suivantes :

$$\boxed{f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{q}}$$

(contrainte technologique saturée),

$$\boxed{\frac{\mathrm{Pm}_1}{w_1} = \frac{\mathrm{Pm}_2}{w_2} = \cdots = \frac{\mathrm{Pm}_n}{w_n}}$$

(condition marginale de minimisation des coûts),

$$\boxed{\mathrm{TMST}_{i,j} = \frac{\mathrm{Pm}_i}{\mathrm{Pm}_j} = \frac{w_i}{w_j}}$$

(condition de tangence entre isoquante et isocoût),

$$\boxed{C(\bar{q}, w), \qquad CM(\bar{q}) = \frac{C(\bar{q}, w)}{\bar{q}}, \qquad Cm(\bar{q}) = \frac{\partial C(\bar{q}, w)}{\partial \bar{q}}}$$

(fonctions de coût),

$$\boxed{p = Cm(q)}$$

(condition d'offre du producteur concurrentiel),

$$\boxed{p\mathrm{Pm}_j = w_j}$$

(condition de maximisation du profit en facteurs),

et, dans le cas des technologies homogènes de degré ρ,

$$\boxed{\pi = (1 - \rho)pq.}$$

Ces relations constituent l'ossature théorique de tous les exercices qui suivent.

3.2 Intitulés

Exercice 1

On considère une entreprise en concurrence pure et parfaite qui produit un bien homogène à l'aide de deux facteurs de production : le travail L et le capital K. Sa fonction de production est

$$Q = K^{1/3}L^{2/3},$$

où $L > 0$ et $K > 0$.

Le prix du travail est

$$w = 2,$$

et le prix du capital est

$$r = 8.$$

On suppose dans tout l'exercice que les solutions considérées sont intérieures.

1. On souhaite produire la quantité

$$\bar{Q} = 8.$$

   Vérifier que la combinaison productive

$$(\bar{L}, \bar{K}) = (8, 8)$$

   permet bien de produire exactement cette quantité.

2. Cette combinaison productive minimise-t-elle le coût de production de $\bar{Q} = 8$? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des conditions marginales d'optimalité.

3. Si cette combinaison n'est pas optimale, indiquer dans quel sens l'entreprise doit modifier ses quantités de travail et de capital.

4. Déterminer la combinaison productive de coût minimal permettant de produire $\bar{Q} = 8$.

5. En déduire la fonction de coût total $C(Q)$, puis le coût marginal $Cm(Q)$ et le coût moyen $CM(Q)$.

6. On note p le prix du bien produit. Déterminer l'offre du producteur concurrentiel. Que peut-on dire du profit lorsque

$$p = 6 \text{ ?}$$

Exercice 2

On considère une entreprise en concurrence pure et parfaite qui produit un bien homogène à l'aide de trois facteurs de production : le travail L, le capital K et la terre T. Sa fonction de production est

$$Q = (LKT)^{1/4},$$

où $L > 0$, $K > 0$ et $T > 0$.

Les prix des facteurs sont

$$w = 1, \qquad r = 2, \qquad s = 4.$$

On suppose dans tout l'exercice que les solutions considérées sont intérieures.

1. On souhaite produire la quantité
$$\bar{Q} = 8.$$
Vérifier que la combinaison productive
$$(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) = (16, 16, 16)$$
permet bien de produire exactement cette quantité.

2. Cette combinaison productive minimise-t-elle le coût de production de $\bar{Q} = 8$? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des conditions marginales d'optimalité.

3. Si cette combinaison n'est pas optimale, indiquer dans quel sens l'entreprise doit modifier ses quantités de facteurs.

4. Déterminer la combinaison productive de coût minimal permettant de produire $\bar{Q} = 8$.

5. En déduire la fonction de coût total $C(Q)$, puis le coût marginal $Cm(Q)$ et le coût moyen $CM(Q)$.

6. On note p le prix du bien produit. Déterminer l'offre du producteur concurrentiel. Que valent le profit et la part du profit dans le chiffre d'affaires lorsque
$$p = 16 \text{ ?}$$

Exercice 3

On considère une entreprise en concurrence pure et parfaite qui produit un bien homogène à l'aide de deux facteurs de production : le travail L et le capital K. Sa fonction de production est
$$Q = L^{1/2} K^{1/4},$$
où $L > 0$ et $K > 0$.

On note $a > 0$ un paramètre. Les prix des facteurs sont
$$w = 2a, \qquad r = a.$$

On suppose dans tout l'exercice que les solutions considérées sont intérieures.

1. On souhaite produire la quantité
$$\bar{Q} = 8.$$
Vérifier que la combinaison productive
$$(\bar{L}, \bar{K}) = (32, 4)$$

permet bien de produire exactement cette quantité.

2. Cette combinaison productive minimise-t-elle le coût de production de $\bar{Q} = 8$? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des conditions marginales d'optimalité.

3. Si cette combinaison n'est pas optimale, indiquer dans quel sens l'entreprise doit modifier ses quantités de facteurs.

4. Déterminer la combinaison productive de coût minimal permettant de produire $\bar{Q} = 8$.

5. En déduire la fonction de coût total $C(Q)$, puis le coût marginal $Cm(Q)$ et le coût moyen $CM(Q)$.

6. On suppose maintenant que le prix du bien produit est

$$p = 8a.$$

Déterminer l'offre optimale du producteur, ainsi que les quantités optimales de travail et de capital. Montrer que ces choix réels sont indépendants de a, puis calculer le profit et la part du profit dans le chiffre d'affaires.

Exercice 4

On considère une entreprise en concurrence pure et parfaite qui produit un bien homogène à l'aide de trois facteurs de production : le travail L, le capital K et la terre T. Sa fonction de production est

$$Q = (LKT)^{1/3},$$

où $L > 0$, $K > 0$ et $T > 0$.

Les prix des facteurs sont

$$w = 1, \qquad r = 2, \qquad s = 4.$$

On suppose dans tout l'exercice que les solutions considérées sont intérieures.

1. On souhaite produire la quantité

$$\bar{Q} = 8.$$

Vérifier que la combinaison productive

$$(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) = (8, 8, 8)$$

permet bien de produire exactement cette quantité.

2. Cette combinaison productive minimise-t-elle le coût de production de $\bar{Q} = 8$? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des conditions marginales d'optimalité.

3. Si cette combinaison n'est pas optimale, indiquer dans quel sens l'entreprise doit modifier ses

quantités de facteurs.

4. Déterminer la combinaison productive de coût minimal permettant de produire $\bar{Q} = 8$.

5. En déduire la fonction de coût total $C(Q)$, puis le coût marginal $Cm(Q)$ et le coût moyen $CM(Q)$.

6. On note p le prix du bien produit. Déterminer l'offre du producteur concurrentiel. Que valent le profit et la part du profit dans le chiffre d'affaires lorsque

$$p = 6 \text{ ?}$$

Exercice 5

On considère une entreprise en concurrence pure et parfaite qui produit un bien homogène à l'aide de quatre facteurs de production : le travail L, le capital K, la terre T et l'énergie E. Sa fonction de production est

$$Q = (LKTE)^{1/5},$$

où $L > 0$, $K > 0$, $T > 0$ et $E > 0$.

Les prix des facteurs sont

$$w = 1, \qquad r = 2, \qquad s = 4, \qquad e = 8.$$

On suppose dans tout l'exercice que les solutions considérées sont intérieures.

1. On souhaite produire la quantité
$$\bar{Q} = 4.$$
Vérifier que la combinaison productive
$$(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}, \bar{E}) = (8, 8, 8, 2)$$
permet bien de produire exactement cette quantité.

2. Cette combinaison productive minimise-t-elle le coût de production de $\bar{Q} = 4$? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des conditions marginales d'optimalité.

3. Si cette combinaison n'est pas optimale, indiquer dans quel sens l'entreprise doit modifier ses quantités de facteurs.

4. Déterminer la combinaison productive de coût minimal permettant de produire $\bar{Q} = 4$.

5. En déduire la fonction de coût total $C(Q)$, puis le coût marginal $Cm(Q)$ et le coût moyen $CM(Q)$.

6. On suppose maintenant que le prix du bien produit est

$$p = 20.$$

   Déterminer l'offre optimale du producteur, ainsi que les quantités optimales de facteurs. Calculer enfin le profit et la part du profit dans le chiffre d'affaires.

Exercice 6

On considère une entreprise en concurrence pure et parfaite qui produit un bien homogène à l'aide de trois facteurs de production : le travail L, le capital K et la terre T. Sa fonction de production est

$$Q = L^{1/3} K^{1/3} T^{1/6},$$

où $L > 0$, $K > 0$ et $T > 0$.

Les prix des facteurs sont

$$w = 2, \qquad r = 2, \qquad s = 1.$$

On suppose dans tout l'exercice que les solutions considérées sont intérieures.

1. On souhaite produire la quantité

$$\bar{Q} = 32.$$

   Vérifier que la combinaison productive

$$(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) = (256, 16, 64)$$

   permet bien de produire exactement cette quantité.

2. Cette combinaison productive minimise-t-elle le coût de production de $\bar{Q} = 32$? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des conditions marginales d'optimalité.

3. Si cette combinaison n'est pas optimale, indiquer dans quel sens l'entreprise doit modifier ses quantités de facteurs.

4. Déterminer la combinaison productive de coût minimal permettant de produire $\bar{Q} = 32$.

5. En déduire la fonction de coût total $C(Q)$, puis le coût marginal $Cm(Q)$ et le coût moyen $CM(Q)$.

6. On suppose maintenant que le prix du bien produit est

$$p = 12.$$

   Déterminer l'offre optimale du producteur, ainsi que les quantités optimales de travail, de capital et de terre. Calculer ensuite le profit et la part du profit dans le chiffre d'affaires.

7. On suppose enfin que le prix du bien et tous les prix de facteurs sont multipliés par un même scalaire $\lambda > 0$. Sans refaire tous les calculs, indiquer l'effet de cette modification sur la production optimale, les demandes de facteurs, le profit et la part du profit dans le chiffre d'affaires.

3.3 Corrections

Corrigé de l'exercice 1

On considère une entreprise qui produit selon la technologie

$$Q = K^{1/3}L^{2/3},$$

avec prix des facteurs

$$w = 2 \qquad \text{et} \qquad r = 8.$$

L'entreprise cherche d'abord à minimiser le coût nécessaire pour produire une quantité donnée, puis, dans un second temps, à déterminer son offre en concurrence pure et parfaite.

1. Vérification de la faisabilité technique de la combinaison proposée. On souhaite produire

$$\bar{Q} = 8.$$

On considère la combinaison

$$(\bar{L}, \bar{K}) = (8, 8).$$

Il faut vérifier que cette combinaison permet bien de produire exactement 8 unités.

On remplace $L = 8$ et $K = 8$ dans la fonction de production :

$$Q = 8^{1/3} \times 8^{2/3}.$$

Or

$$8^{1/3} = 2 \qquad \text{et} \qquad 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4.$$

Donc

$$Q = 2 \times 4 = 8.$$

Conclusion. La combinaison

$$(\bar{L}, \bar{K}) = (8, 8)$$

est bien **techniquement admissible** pour produire

$$\bar{Q} = 8.$$

2. Test d'optimalité de la combinaison proposée. **Rappel de cours.** Dans un problème de minimisation des coûts avec solution intérieure, la condition marginale d'optimalité s'écrit

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{\mathrm{Pm}_K}{r}.$$

Autrement dit, le dernier euro dépensé en travail et le dernier euro dépensé en capital doivent procurer le même supplément de production.

De manière équivalente, on peut écrire

$$\mathrm{TMST}_{L,K} = \frac{\mathrm{Pm}_L}{\mathrm{Pm}_K} = \frac{w}{r}.$$

Calcul des productivités marginales. La fonction de production est

$$Q = K^{1/3}L^{2/3}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{2}{3}K^{1/3}L^{-1/3},$$
$$\mathrm{Pm}_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{3}K^{-2/3}L^{2/3}.$$

Il est utile de remarquer qu'avec une fonction Cobb–Douglas, on peut aussi écrire

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{2}{3}\frac{Q}{L}, \qquad \mathrm{Pm}_K = \frac{1}{3}\frac{Q}{K}.$$

Cette écriture simplifie beaucoup les calculs.

Évaluation en $(L, K) = (8, 8)$. Comme cette combinaison produit $Q = 8$, on a :

$$\mathrm{Pm}_L(\bar{L}, \bar{K}) = \frac{2}{3}\frac{8}{8} = \frac{2}{3},$$

$$\mathrm{Pm}_K(\bar{L}, \bar{K}) = \frac{1}{3}\frac{8}{8} = \frac{1}{3}.$$

On compare maintenant les productivités marginales par euro dépensé :

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{1/3}{8} = \frac{1}{24}.$$

On obtient donc

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} > \frac{\mathrm{Pm}_K}{r}.$$

Ces deux rapports ne sont pas égaux.

Conclusion. La combinaison

$$(L, K) = (8, 8)$$

ne minimise **pas** le coût de production de $Q = 8$.

3. Sens de modification des facteurs. Comme

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} > \frac{\mathrm{Pm}_K}{r},$$

un euro supplémentaire dépensé en travail rapporte davantage de production qu'un euro supplémentaire dépensé en capital.

À production donnée, l'entreprise peut donc réduire son coût en substituant du travail au capital.

Conclusion. L'entreprise doit :

$$\boxed{\text{augmenter } L \text{ et diminuer } K.}$$

Interprétation économique. Le capital est ici relativement trop utilisé au regard de son coût, tandis que le travail est relativement sous-utilisé.

4. Détermination de la combinaison productive de coût minimal pour $\bar{Q} = 8$. Étape 1 : écrire la condition marginale d'optimalité.

À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{\mathrm{Pm}_K}{r}.$$

En utilisant les expressions utiles

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{2}{3}\frac{Q}{L}, \qquad \mathrm{Pm}_K = \frac{1}{3}\frac{Q}{K},$$

on obtient

$$\frac{\frac{2}{3}\frac{Q}{L}}{2} = \frac{\frac{1}{3}\frac{Q}{K}}{8}.$$

Comme $Q > 0$, on peut simplifier par Q. Il vient

$$\frac{2}{3}\frac{1}{2L} = \frac{1}{3}\frac{1}{8K}.$$

Simplifions :

$$\frac{1}{3L} = \frac{1}{24K}.$$

On en déduit

$$24K = 3L.$$

Donc

$$\boxed{L = 8K.}$$

On peut retrouver exactement la même relation à partir du TMST. En effet,

$$\text{TMST}_{L,K} = \frac{\text{Pm}_L}{\text{Pm}_K} = \frac{\frac{2}{3}\frac{Q}{L}}{\frac{1}{3}\frac{Q}{K}} = 2\frac{K}{L}.$$

La condition

$$\text{TMST}_{L,K} = \frac{w}{r} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

donne donc

$$2\frac{K}{L} = \frac{1}{4},$$

c'est-à-dire

$$L = 8K.$$

Étape 2 : utiliser la contrainte technologique.

On veut produire

$$Q = 8.$$

La contrainte technologique est donc

$$K^{1/3}L^{2/3} = 8.$$

On remplace L par $8K$:

$$K^{1/3}(8K)^{2/3} = 8.$$

Calculons :

$$(8K)^{2/3} = 8^{2/3}K^{2/3} = 4K^{2/3}.$$

Donc

$$K^{1/3} \times 4K^{2/3} = 8.$$

Comme

$$K^{1/3}K^{2/3} = K,$$

on obtient

$$4K = 8.$$

D'où

$$K = 2.$$

Puis, comme

$$L = 8K,$$

on en déduit

$$L = 16.$$

Conclusion. La combinaison de coût minimal permettant de produire

$$\bar{Q} = 8$$

est

$$\boxed{(L^*, K^*) = (16, 2).}$$

5. Fonction de coût total, coût marginal et coût moyen. On cherche maintenant à raisonner pour une quantité générale $Q > 0$.

Étape 1 : demandes conditionnelles de facteurs.

La condition marginale donne toujours

$$L = 8K.$$

On remplace dans la fonction de production :

$$Q = K^{1/3}(8K)^{2/3}.$$

Comme on l'a déjà vu,

$$(8K)^{2/3} = 4K^{2/3}.$$

Donc

$$Q = K^{1/3} \times 4K^{2/3} = 4K.$$

On en déduit

$$\boxed{K^*(Q) = \frac{Q}{4}.}$$

Puis

$$L^*(Q) = 8K^*(Q) = 8 \cdot \frac{Q}{4} = 2Q.$$

Ainsi,

$$\boxed{L^*(Q) = 2Q.}$$

Étape 2 : calcul du coût total.

Le coût total vaut

$$C(Q) = wL^*(Q) + rK^*(Q).$$

En remplaçant par $w = 2$, $r = 8$, $L^*(Q) = 2Q$ et $K^*(Q) = Q/4$, on obtient

$$C(Q) = 2(2Q) + 8\left(\frac{Q}{4}\right).$$

Calculons :

$$2(2Q) = 4Q, \qquad 8\left(\frac{Q}{4}\right) = 2Q.$$

Donc

$$\boxed{C(Q) = 6Q.}$$

Étape 3 : coût marginal.

Le coût marginal est

$$Cm(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ}.$$

Comme

$$C(Q) = 6Q,$$

on obtient

$$\boxed{Cm(Q) = 6.}$$

Étape 4 : coût moyen.

Le coût moyen est

$$CM(Q) = \frac{C(Q)}{Q}.$$

Donc

$$CM(Q) = \frac{6Q}{Q} = 6.$$

Ainsi,

$$\boxed{CM(Q) = 6.}$$

Interprétation. Le coût total est ici proportionnel à la production. Le coût marginal et le coût moyen sont donc constants et égaux.

Cela est cohérent avec le fait que la fonction de production présente des **rendements constants à l'échelle**, puisque la somme des exposants vaut

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

6. Offre du producteur concurrentiel et profit pour $p = 6$. Sous concurrence pure et parfaite, l'entreprise prend le prix p comme donné et choisit sa production Q pour maximiser son profit :

$$\pi(Q) = pQ - C(Q) = pQ - 6Q = (p - 6)Q.$$

Analyse selon la valeur de p.

Premier cas :

$$p < 6.$$

Alors

$$\pi(Q) = (p-6)Q < 0 \qquad \text{pour tout } Q > 0.$$

Le profit est donc maximal pour

$$\boxed{Q^s = 0.}$$

Deuxième cas :

$$p = 6.$$

Alors

$$\pi(Q) = 0 \qquad \text{pour tout } Q \geq 0.$$

Toute quantité est alors optimale. L'offre n'est pas une fonction ordinaire, mais une **correspondance** :

$$\boxed{Q^s \in [0, +\infty[.}$$

Troisième cas :

$$p > 6.$$

Alors

$$\pi(Q) = (p-6)Q$$

est croissant sans borne avec Q. Il n'existe donc pas de solution optimale finie.

Conclusion. L'offre du producteur concurrentiel s'écrit :

$$\boxed{Q^s(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 6, \\ \text{tout } Q \geq 0 & \text{si } p = 6, \\ \text{pas d'optimum fini} & \text{si } p > 6. \end{cases}}$$

Cas particulier $p = 6$. Si

$$p = 6,$$

alors

$$\pi(Q) = 0 \qquad \text{pour tout } Q \geq 0.$$

Le profit est donc **nul**, quelle que soit la quantité produite.

Interprétation économique. Dans une technologie à rendements constants à l'échelle, le coût moyen est constant et égal au coût marginal. En concurrence pure et parfaite, le seul prix compatible avec un équilibre concurrentiel est donc

$$p = CM = Cm = 6,$$

et le profit est alors nul.

Vérification finale pour $Q = 8$. À la combinaison optimale trouvée,

$$(L^*, K^*) = (16, 2),$$

la production vaut

$$Q = 2^{1/3} \times 16^{2/3}.$$

Or

$$16^{2/3} = (2^4)^{2/3} = 2^{8/3},$$

donc

$$Q = 2^{1/3} \times 2^{8/3} = 2^3 = 8.$$

Le coût vaut

$$2 \times 16 + 8 \times 2 = 32 + 16 = 48.$$

Comme

$$C(8) = 6 \times 8 = 48,$$

tout est cohérent.

Réponse finale.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La combinaison } (8,8) \text{ permet bien de produire } 8, \text{ mais elle ne minimise pas le coût.} \\ \text{L'entreprise doit augmenter le travail et diminuer le capital.} \\ \text{La combinaison de coût minimal pour } Q = 8 \text{ est } (L^*, K^*) = (16, 2). \\ \text{La fonction de coût total est } C(Q) = 6Q, \text{ d'où } Cm(Q) = 6 \text{ et } CM(Q) = 6. \\ \text{L'offre vérifie } Q^s(p) = 0 \text{ si } p < 6, \ Q^s \in [0, +\infty[\text{ si } p = 6, \text{ et il n'existe pas d'optimum fini si } p > 6. \\ \text{Lorsque } p = 6, \text{ le profit est nul.} \end{array}}$$

Corrigé de l'exercice 2

On considère une entreprise qui produit selon la technologie

$$Q = (LKT)^{1/4},$$

avec prix des facteurs

$$w = 1, \qquad r = 2, \qquad s = 4.$$

L'entreprise cherche d'abord à minimiser le coût nécessaire pour produire une quantité donnée, puis à déterminer son offre en concurrence pure et parfaite.

1. Vérification de la faisabilité technique de la combinaison proposée. On souhaite produire

$$\bar{Q} = 8.$$

On considère la combinaison

$$(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) = (16, 16, 16).$$

Il faut vérifier que cette combinaison permet bien de produire exactement 8 unités.

On remplace $L = 16$, $K = 16$ et $T = 16$ dans la fonction de production :

$$Q = (16 \times 16 \times 16)^{1/4}.$$

Or

$$16 \times 16 \times 16 = 16^3.$$

Donc

$$Q = (16^3)^{1/4} = 16^{3/4}.$$

Comme

$$16 = 2^4,$$

on a

$$16^{3/4} = (2^4)^{3/4} = 2^3 = 8.$$

Conclusion. La combinaison

$$(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) = (16, 16, 16)$$

est bien **techniquement admissible** pour produire

$$\bar{Q} = 8.$$

2. Test d'optimalité de la combinaison proposée. **Rappel de cours.** Dans un problème de minimisation des coûts avec solution intérieure, la condition marginale d'optimalité s'écrit

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{\mathrm{Pm}_T}{s}.$$

Autrement dit, le dernier euro dépensé dans chacun des facteurs doit procurer le même supplément de production.

De manière équivalente, on peut écrire

$$\mathrm{TMST}_{L,K} = \frac{w}{r}, \qquad \mathrm{TMST}_{L,T} = \frac{w}{s}.$$

Calcul des productivités marginales. La fonction de production est

$$Q = (LKT)^{1/4} = L^{1/4}K^{1/4}T^{1/4}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pm}_L &= \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{4}L^{-3/4}K^{1/4}T^{1/4}, \\
\mathrm{Pm}_K &= \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{4}L^{1/4}K^{-3/4}T^{1/4}, \\
\mathrm{Pm}_T &= \frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{1}{4}L^{1/4}K^{1/4}T^{-3/4}.
\end{aligned}$$

Comme il s'agit d'une fonction Cobb–Douglas, on peut aussi écrire

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{1}{4}\frac{Q}{L}, \qquad \mathrm{Pm}_K = \frac{1}{4}\frac{Q}{K}, \qquad \mathrm{Pm}_T = \frac{1}{4}\frac{Q}{T}.$$

Cette écriture est particulièrement commode dans les calculs.

Évaluation en $(L, K, T) = (16, 16, 16)$. Comme cette combinaison produit $Q = 8$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pm}_L(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) &= \frac{1}{4}\frac{8}{16} = \frac{1}{8}, \\
\mathrm{Pm}_K(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) &= \frac{1}{4}\frac{8}{16} = \frac{1}{8}, \\
\mathrm{Pm}_T(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) &= \frac{1}{4}\frac{8}{16} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

On compare maintenant les productivités marginales par euro dépensé :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} &= \frac{1/8}{1} = \frac{1}{8}, \\
\frac{\mathrm{Pm}_K}{r} &= \frac{1/8}{2} = \frac{1}{16}, \\
\frac{\mathrm{Pm}_T}{s} &= \frac{1/8}{4} = \frac{1}{32}.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} > \frac{\mathrm{Pm}_K}{r} > \frac{\mathrm{Pm}_T}{s}.$$

Ces trois rapports ne sont pas égaux.

Conclusion. La combinaison

$$(L, K, T) = (16, 16, 16)$$

ne minimise **pas** le coût de production de $Q = 8$.

3. Sens de modification des facteurs. Puisque

$$\frac{\text{Pm}_L}{w} > \frac{\text{Pm}_K}{r} > \frac{\text{Pm}_T}{s},$$

un euro supplémentaire dépensé en travail rapporte plus de production qu'un euro supplémentaire dépensé en capital, et davantage encore qu'un euro supplémentaire dépensé en terre.

À production donnée, l'entreprise peut donc réduire son coût en réallouant une partie de sa dépense :

- vers le travail, qui est ici relativement sous-utilisé ;
- au détriment du capital et surtout de la terre, qui sont relativement sur-utilisés au regard de leur coût.

Conclusion. L'entreprise doit :

$$\boxed{\text{augmenter } L, \qquad \text{diminuer } K, \qquad \text{et diminuer } T.}$$

4. Détermination de la combinaison productive de coût minimal pour $\bar{Q} = 8$. Étape 1 : écrire les conditions marginales d'optimalité.

À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\text{Pm}_L}{w} = \frac{\text{Pm}_K}{r} = \frac{\text{Pm}_T}{s}.$$

En utilisant les écritures

$$\text{Pm}_L = \frac{1}{4}\frac{Q}{L}, \qquad \text{Pm}_K = \frac{1}{4}\frac{Q}{K}, \qquad \text{Pm}_T = \frac{1}{4}\frac{Q}{T},$$

on obtient

$$\frac{\frac{1}{4}\frac{Q}{L}}{1} = \frac{\frac{1}{4}\frac{Q}{K}}{2} = \frac{\frac{1}{4}\frac{Q}{T}}{4}.$$

Comme $Q > 0$, on peut simplifier par $\frac{1}{4}Q$. Il reste

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2K} = \frac{1}{4T}.$$

Étape 2 : en déduire les relations entre les facteurs.

Comparons le premier et le deuxième termes :

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2K}.$$

On en déduit

$$L = 2K,$$

soit

$$\boxed{K = \frac{L}{2}.}$$

Comparons ensuite le premier et le troisième termes :

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{4T}.$$

On obtient

$$L = 4T,$$

soit

$$\boxed{T = \frac{L}{4}.}$$

Nous avons donc exprimé tous les facteurs en fonction de L :

$$K = \frac{L}{2}, \qquad T = \frac{L}{4}.$$

Étape 3 : utiliser la contrainte technologique.

On veut produire

$$Q = 8.$$

La contrainte technologique est donc

$$(LKT)^{1/4} = 8.$$

On remplace K et T par les expressions obtenues :

$$\left(L \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4}\right)^{1/4} = 8.$$

Calculons le produit à l'intérieur de la parenthèse :

$$L \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} = \frac{L^3}{8}.$$

Donc

$$\left(\frac{L^3}{8}\right)^{1/4} = 8.$$

On peut écrire
$$\left(\frac{L^3}{8}\right)^{1/4} = \frac{L^{3/4}}{8^{1/4}}.$$
Or
$$8^{1/4} = 2^{3/4}.$$
On obtient donc
$$\frac{L^{3/4}}{2^{3/4}} = 8.$$
Cela revient à écrire
$$\left(\frac{L}{2}\right)^{3/4} = 8.$$
On élève alors les deux membres à la puissance $\frac{4}{3}$:
$$\frac{L}{2} = 8^{4/3}.$$
Or
$$8^{4/3} = (8^{1/3})^4 = 2^4 = 16.$$
Ainsi,
$$\frac{L}{2} = 16,$$
d'où
$$L = 32.$$
Puis
$$K = \frac{L}{2} = 16, \qquad T = \frac{L}{4} = 8.$$

Conclusion. La combinaison productive de coût minimal permettant de produire
$$\bar{Q} = 8$$
est
$$\boxed{(L^*, K^*, T^*) = (32, 16, 8).}$$

5. Fonction de coût total, coût marginal et coût moyen. On raisonne maintenant pour une quantité générale $Q > 0$.

Étape 1 : demandes conditionnelles de facteurs.

Les conditions marginales donnent toujours
$$K = \frac{L}{2}, \qquad T = \frac{L}{4}.$$

On remplace dans la fonction de production :

$$Q = \left(L \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4}\right)^{1/4} = \left(\frac{L^3}{8}\right)^{1/4}.$$

Comme plus haut,

$$Q = \left(\frac{L}{2}\right)^{3/4}.$$

On élève les deux membres à la puissance $\frac{4}{3}$:

$$Q^{4/3} = \frac{L}{2}.$$

Donc

$$\boxed{L^*(Q) = 2Q^{4/3}.}$$

Par suite,

$$K^*(Q) = \frac{L^*(Q)}{2} = Q^{4/3},$$

et

$$T^*(Q) = \frac{L^*(Q)}{4} = \frac{1}{2}Q^{4/3}.$$

Ainsi,

$$\boxed{K^*(Q) = Q^{4/3},} \qquad \boxed{T^*(Q) = \frac{1}{2}Q^{4/3}.}$$

Étape 2 : calcul du coût total.

Le coût total vaut

$$C(Q) = wL^*(Q) + rK^*(Q) + sT^*(Q).$$

En remplaçant par $w = 1$, $r = 2$, $s = 4$, on obtient

$$C(Q) = 1 \cdot 2Q^{4/3} + 2 \cdot Q^{4/3} + 4 \cdot \frac{1}{2}Q^{4/3}.$$

Calculons chaque terme :

$$1 \cdot 2Q^{4/3} = 2Q^{4/3}, \qquad 2 \cdot Q^{4/3} = 2Q^{4/3}, \qquad 4 \cdot \frac{1}{2}Q^{4/3} = 2Q^{4/3}.$$

Donc

$$\boxed{C(Q) = 6Q^{4/3}.}$$

Étape 3 : coût marginal.

Le coût marginal est

$$Cm(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ}.$$

Comme
$$C(Q) = 6Q^{4/3},$$
on obtient
$$Cm(Q) = 6 \cdot \frac{4}{3} Q^{1/3} = 8Q^{1/3}.$$
Donc
$$\boxed{Cm(Q) = 8Q^{1/3}.}$$

Étape 4 : coût moyen.

Le coût moyen est
$$CM(Q) = \frac{C(Q)}{Q}.$$
On obtient
$$CM(Q) = \frac{6Q^{4/3}}{Q} = 6Q^{1/3}.$$
Ainsi,
$$\boxed{CM(Q) = 6Q^{1/3}.}$$

On remarque que
$$Cm(Q) = 8Q^{1/3} \qquad \text{et} \qquad CM(Q) = 6Q^{1/3},$$
donc
$$Cm(Q) > CM(Q).$$

Interprétation. La technologie présente ici des **rendements décroissants à l'échelle**, puisque la somme des exposants vaut
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1.$$
Il est donc naturel que le coût marginal soit croissant et supérieur au coût moyen.

6. Offre du producteur concurrentiel, profit et part du profit lorsque $p = 16$. Sous concurrence pure et parfaite, l'entreprise prend le prix p comme donné et choisit sa production Q pour maximiser son profit :
$$\pi(Q) = pQ - C(Q) = pQ - 6Q^{4/3}.$$

Étape 1 : déterminer l'offre.

Dans une solution intérieure, la condition d'optimalité s'écrit
$$p = Cm(Q).$$

Comme

$$Cm(Q) = 8Q^{1/3},$$

on obtient

$$p = 8Q^{1/3}.$$

On isole Q :

$$Q^{1/3} = \frac{p}{8},$$

donc

$$\boxed{Q^s(p) = \left(\frac{p}{8}\right)^3.}$$

Étape 2 : cas particulier $p = 16$.

Si

$$p = 16,$$

alors

$$Q^s(16) = \left(\frac{16}{8}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

L'entreprise offre donc

$$\boxed{Q^* = 8.}$$

Étape 3 : calcul du profit.

Le profit vaut

$$\pi^* = pQ^* - C(Q^*).$$

Ici,

$$pQ^* = 16 \times 8 = 128.$$

Et

$$C(8) = 6 \times 8^{4/3}.$$

Or

$$8^{4/3} = (8^{1/3})^4 = 2^4 = 16.$$

Donc

$$C(8) = 6 \times 16 = 96.$$

Ainsi,

$$\pi^* = 128 - 96 = 32.$$

Donc

$$\boxed{\pi^* = 32.}$$

Étape 4 : part du profit dans le chiffre d'affaires.

Le chiffre d'affaires vaut

$$pQ^* = 128.$$

La part du profit dans le chiffre d'affaires est donc

$$\frac{\pi^*}{pQ^*} = \frac{32}{128} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\pi^*}{pQ^*} = \frac{1}{4}.}$$

Interprétation économique. La somme des exposants de la fonction de production vaut

$$\rho = \frac{3}{4}.$$

Pour une technologie homogène de degré ρ, le profit en concurrence parfaite vaut

$$\pi = (1-\rho)pQ.$$

Ici,

$$1-\rho = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

On retrouve donc immédiatement la relation

$$\pi = \frac{1}{4}pQ.$$

Vérification finale pour $Q = 8$. À la combinaison optimale trouvée,

$$(L^*, K^*, T^*) = (32, 16, 8),$$

la production vaut

$$Q = (32 \times 16 \times 8)^{1/4}.$$

Or

$$32 \times 16 \times 8 = 4096.$$

Et comme

$$4096 = 2^{12},$$

on a

$$Q = 4096^{1/4} = 2^{12/4} = 2^3 = 8.$$

Le coût vaut

$$1 \times 32 + 2 \times 16 + 4 \times 8 = 32 + 32 + 32 = 96.$$

Or

$$C(8) = 6 \times 8^{4/3} = 6 \times 16 = 96.$$

Tout est donc cohérent.

Réponse finale.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La combinaison } (16,16,16) \text{ permet bien de produire } 8, \text{ mais elle ne minimise pas le coût.} \\ \text{L'entreprise doit augmenter le travail et diminuer le capital et la terre.} \\ \text{La combinaison de coût minimal pour } Q = 8 \text{ est } (L^*, K^*, T^*) = (32, 16, 8). \\ \text{La fonction de coût total est } C(Q) = 6Q^{4/3}, \\ \text{d'où } Cm(Q) = 8Q^{1/3} \text{ et } CM(Q) = 6Q^{1/3}. \\ \text{L'offre du producteur est } Q^s(p) = \left(\dfrac{p}{8}\right)^3. \\ \text{Lorsque } p = 16, \text{ on a } Q^* = 8,\ \pi^* = 32, \text{ et } \dfrac{\pi^*}{pQ^*} = \dfrac{1}{4}. \end{array}}$$

Corrigé de l'exercice 3

On considère une entreprise qui produit selon la technologie

$$Q = L^{1/2}K^{1/4},$$

avec prix des facteurs

$$w = 2a, \qquad r = a, \qquad a > 0.$$

L'entreprise cherche d'abord à minimiser le coût nécessaire pour produire une quantité donnée, puis à déterminer son offre en concurrence pure et parfaite.

1. Vérification de la faisabilité technique de la combinaison proposée. On souhaite produire

$$\bar{Q} = 8.$$

On considère la combinaison

$$(\bar{L}, \bar{K}) = (32, 4).$$

Il faut vérifier que cette combinaison permet bien de produire exactement 8 unités.

On remplace $L = 32$ et $K = 4$ dans la fonction de production :

$$Q = 32^{1/2}4^{1/4}.$$

Calculons séparément les deux termes :

$$32^{1/2} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2},$$

et

$$4^{1/4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}.$$

Par conséquent,

$$Q = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \times 2 = 8.$$

Conclusion. La combinaison

$$(\bar{L}, \bar{K}) = (32, 4)$$

est bien **techniquement admissible** pour produire

$$\bar{Q} = 8.$$

2. Test d'optimalité de la combinaison proposée. Rappel de cours. Dans un problème de minimisation des coûts avec solution intérieure, la condition marginale d'optimalité s'écrit

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{\mathrm{Pm}_K}{r}.$$

Autrement dit, le dernier euro dépensé en travail et le dernier euro dépensé en capital doit procurer le même supplément de production.

De manière équivalente, on peut écrire

$$\mathrm{TMST}_{L,K} = \frac{\mathrm{Pm}_L}{\mathrm{Pm}_K} = \frac{w}{r}.$$

Calcul des productivités marginales. La fonction de production est

$$Q = L^{1/2}K^{1/4}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{2}L^{-1/2}K^{1/4},$$

$$\mathrm{Pm}_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{4}L^{1/2}K^{-3/4}.$$

Il est utile de remarquer qu'avec cette fonction de type Cobb–Douglas, on peut aussi écrire

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{1}{2}\frac{Q}{L}, \qquad \mathrm{Pm}_K = \frac{1}{4}\frac{Q}{K}.$$

Cette écriture simplifie fortement les calculs.

Évaluation en $(L, K) = (32, 4)$. Comme cette combinaison produit $Q = 8$, on a :

$$\text{Pm}_L(\bar{L}, \bar{K}) = \frac{1}{2}\frac{8}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8},$$

$$\text{Pm}_K(\bar{L}, \bar{K}) = \frac{1}{4}\frac{8}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

On compare maintenant les productivités marginales par euro dépensé :

$$\frac{\text{Pm}_L}{w} = \frac{1/8}{2a} = \frac{1}{16a},$$

$$\frac{\text{Pm}_K}{r} = \frac{1/2}{a} = \frac{1}{2a}.$$

On obtient donc

$$\frac{\text{Pm}_K}{r} > \frac{\text{Pm}_L}{w}.$$

Ces deux rapports ne sont pas égaux.

Conclusion. La combinaison

$$(L, K) = (32, 4)$$

ne minimise **pas** le coût de production de $Q = 8$.

3. Sens de modification des facteurs. Comme

$$\frac{\text{Pm}_K}{r} > \frac{\text{Pm}_L}{w},$$

un euro supplémentaire dépensé en capital rapporte davantage de production qu'un euro supplémentaire dépensé en travail.

À production donnée, l'entreprise peut donc réduire son coût en substituant du capital au travail.

Conclusion. L'entreprise doit :

$$\boxed{\text{augmenter } K \text{ et diminuer } L.}$$

Interprétation économique. Le travail est ici relativement trop utilisé au regard de son coût, tandis que le capital est relativement sous-utilisé.

4. Détermination de la combinaison productive de coût minimal pour $\bar{Q} = 8$. Étape 1 : écrire la condition marginale d'optimalité.

À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\text{Pm}_L}{w} = \frac{\text{Pm}_K}{r}.$$

En utilisant les expressions

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{1}{2}\frac{Q}{L}, \qquad \mathrm{Pm}_K = \frac{1}{4}\frac{Q}{K},$$

on obtient

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{Q}{L}}{2a} = \frac{\frac{1}{4}\frac{Q}{K}}{a}.$$

Comme $Q > 0$ et $a > 0$, on peut simplifier par Q puis par a. Il vient

$$\frac{1}{4L} = \frac{1}{4K}.$$

Donc

$$\boxed{L = K.}$$

On retrouve le même résultat à partir du TMST. En effet,

$$\mathrm{TMST}_{L,K} = \frac{\mathrm{Pm}_L}{\mathrm{Pm}_K} = \frac{\frac{1}{2}\frac{Q}{L}}{\frac{1}{4}\frac{Q}{K}} = 2\frac{K}{L}.$$

Or

$$\frac{w}{r} = \frac{2a}{a} = 2.$$

La condition

$$\mathrm{TMST}_{L,K} = \frac{w}{r}$$

donne donc

$$2\frac{K}{L} = 2,$$

c'est-à-dire

$$L = K.$$

Étape 2 : utiliser la contrainte technologique.

On veut produire

$$Q = 8.$$

La contrainte technologique est donc

$$L^{1/2}K^{1/4} = 8.$$

Comme $L = K$, on peut écrire

$$L^{1/2}L^{1/4} = 8.$$

Donc

$$L^{3/4} = 8.$$

On élève les deux membres à la puissance $\frac{4}{3}$:

$$L = 8^{4/3}.$$

Or

$$8^{4/3} = (8^{1/3})^4 = 2^4 = 16.$$

Donc

$$L = 16.$$

Comme $L = K$, on obtient aussi

$$K = 16.$$

Conclusion. La combinaison productive de coût minimal permettant de produire

$$\bar{Q} = 8$$

est

$$\boxed{(L^*, K^*) = (16, 16).}$$

5. Fonction de coût total, coût marginal et coût moyen. On raisonne maintenant pour une quantité générale $Q > 0$.

Étape 1 : demandes conditionnelles de facteurs.

La condition marginale donne toujours

$$L = K.$$

On remplace cette relation dans la fonction de production :

$$Q = L^{1/2}K^{1/4} = L^{1/2}L^{1/4} = L^{3/4}.$$

On en déduit

$$L = Q^{4/3}.$$

Comme $K = L$, on obtient également

$$K = Q^{4/3}.$$

Ainsi,

$$\boxed{L^*(Q) = Q^{4/3},} \qquad \boxed{K^*(Q) = Q^{4/3}.}$$

Étape 2 : calcul du coût total.

Le coût total vaut

$$C(Q) = wL^*(Q) + rK^*(Q).$$

En remplaçant par $w = 2a$, $r = a$, $L^*(Q) = Q^{4/3}$ et $K^*(Q) = Q^{4/3}$, on obtient

$$C(Q) = 2aQ^{4/3} + aQ^{4/3}.$$

Donc

$$\boxed{C(Q) = 3aQ^{4/3}.}$$

Étape 3 : coût marginal.

Le coût marginal est

$$Cm(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ}.$$

Comme

$$C(Q) = 3aQ^{4/3},$$

on obtient

$$Cm(Q) = 3a \cdot \frac{4}{3}Q^{1/3} = 4aQ^{1/3}.$$

Ainsi,

$$\boxed{Cm(Q) = 4aQ^{1/3}.}$$

Étape 4 : coût moyen.

Le coût moyen est

$$CM(Q) = \frac{C(Q)}{Q}.$$

On obtient

$$CM(Q) = \frac{3aQ^{4/3}}{Q} = 3aQ^{1/3}.$$

Donc

$$\boxed{CM(Q) = 3aQ^{1/3}.}$$

On remarque que

$$Cm(Q) = 4aQ^{1/3} \qquad \text{et} \qquad CM(Q) = 3aQ^{1/3},$$

donc

$$Cm(Q) > CM(Q).$$

Interprétation économique. La fonction de production présente des **rendements décroissants à l'échelle**, puisque la somme des exposants vaut

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1.$$

Il est donc naturel que le coût marginal soit croissant et supérieur au coût moyen.

6. Offre optimale, demandes de facteurs, indépendance par rapport à a, profit et part du profit lorsque $p = 8a$. Sous concurrence pure et parfaite, l'entreprise prend le prix p comme donné et choisit sa production Q pour maximiser son profit :

$$\pi(Q) = pQ - C(Q) = pQ - 3aQ^{4/3}.$$

Étape 1 : déterminer l'offre.

Dans une solution intérieure, la condition d'optimalité s'écrit

$$p = Cm(Q).$$

Comme

$$Cm(Q) = 4aQ^{1/3},$$

on obtient

$$p = 4aQ^{1/3}.$$

On isole Q :

$$Q^{1/3} = \frac{p}{4a},$$

donc

$$\boxed{Q^s(p, a) = \left(\frac{p}{4a}\right)^3.}$$

Étape 2 : cas particulier $p = 8a$.

Si

$$p = 8a,$$

alors

$$Q^s(8a, a) = \left(\frac{8a}{4a}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

Le producteur offre donc

$$\boxed{Q^* = 8.}$$

Étape 3 : en déduire les demandes optimales de facteurs.

On sait que, au coût minimal,

$$L^*(Q) = Q^{4/3}, \qquad K^*(Q) = Q^{4/3}.$$

En remplaçant $Q = 8$, on obtient

$$L^* = 8^{4/3} = 16, \qquad K^* = 8^{4/3} = 16.$$

Ainsi,

$$\boxed{L^* = 16, \qquad K^* = 16.}$$

Étape 4 : pourquoi ces choix réels sont-ils indépendants de a ?

On constate que, lorsque

$$p = 8a, \qquad w = 2a, \qquad r = a,$$

les trois prix sont tous proportionnels au même facteur a.

Or l'offre du producteur concurrentiel est homogène de degré 0 en tous les prix. Cela signifie que si le prix du bien et les prix des facteurs sont tous multipliés par un même facteur, les choix réels de l'entreprise ne changent pas.

Ici, seul compte le vecteur de prix relatifs :

$$p : w : r = 8a : 2a : a = 8 : 2 : 1.$$

Le paramètre a ne change donc que l'unité nominale dans laquelle les prix sont exprimés ; il ne modifie ni la production optimale, ni les demandes optimales de facteurs.

Conclusion. Les choix réels

$$Q^* = 8, \qquad L^* = 16, \qquad K^* = 16$$

sont **indépendants de a**.

Étape 5 : calcul du profit.

Le profit vaut

$$\pi^* = pQ^* - C(Q^*).$$

Calculons d'abord le chiffre d'affaires :

$$pQ^* = 8a \times 8 = 64a.$$

Calculons ensuite le coût total :

$$C(8) = 3a \times 8^{4/3}.$$

Or

$$8^{4/3} = 16.$$

Donc

$$C(8) = 3a \times 16 = 48a.$$

Ainsi,

$$\pi^* = 64a - 48a = 16a.$$

Donc

$$\boxed{\pi^* = 16a.}$$

Étape 6 : part du profit dans le chiffre d'affaires.

La part du profit dans le chiffre d'affaires vaut

$$\frac{\pi^*}{pQ^*} = \frac{16a}{64a} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\pi^*}{pQ^*} = \frac{1}{4}.}$$

Interprétation économique. La somme des exposants de la fonction de production vaut

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Pour une technologie homogène de degré ρ, on a en concurrence parfaite

$$\pi = (1 - \rho)pQ.$$

Ici,

$$1 - \rho = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

ce qui donne immédiatement

$$\pi = \frac{1}{4}pQ.$$

On retrouve ainsi le résultat précédent.

Vérification finale pour $Q = 8$. À la combinaison optimale trouvée,

$$(L^*, K^*) = (16, 16),$$

la production vaut

$$Q = 16^{1/2}16^{1/4}.$$

Or

$$16^{1/2} = 4, \qquad 16^{1/4} = 2.$$

Donc

$$Q = 4 \times 2 = 8.$$

Le coût vaut

$$2a \times 16 + a \times 16 = 32a + 16a = 48a.$$

Or

$$C(8) = 3a \times 16 = 48a.$$

Tout est cohérent.

Réponse finale.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La combinaison } (32,4) \text{ permet bien de produire } 8, \text{ mais elle ne minimise pas le coût.} \\ \text{L'entreprise doit augmenter le capital et diminuer le travail.} \\ \text{La combinaison de coût minimal pour } Q = 8 \text{ est } (L^*, K^*) = (16, 16). \\ \text{La fonction de coût total est } C(Q) = 3aQ^{4/3}, \\ \text{d'où } Cm(Q) = 4aQ^{1/3} \text{ et } CM(Q) = 3aQ^{1/3}. \\ \text{L'offre du producteur est } Q^s(p,a) = \left(\dfrac{p}{4a}\right)^3. \\ \text{Lorsque } p = 8a, \text{ on a } Q^* = 8, \ L^* = 16, \ K^* = 16, \\ \text{ces choix sont indépendants de } a, \text{ le profit vaut } \pi^* = 16a, \\ \text{et la part du profit dans le chiffre d'affaires est } \dfrac{1}{4}. \end{array}}$$

Corrigé de l'exercice 4

On considère une entreprise qui produit selon la technologie

$$Q = (LKT)^{1/3},$$

avec prix des facteurs

$$w = 1, \qquad r = 2, \qquad s = 4.$$

L'entreprise cherche d'abord à minimiser le coût nécessaire pour produire une quantité donnée, puis à déterminer son offre en concurrence pure et parfaite.

1. Vérification de la faisabilité technique de la combinaison proposée. On souhaite produire

$$\bar{Q} = 8.$$

On considère la combinaison

$$(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) = (8, 8, 8).$$

Il faut vérifier que cette combinaison permet bien de produire exactement 8 unités.

On remplace $L = 8$, $K = 8$ et $T = 8$ dans la fonction de production :

$$Q = (8 \times 8 \times 8)^{1/3}.$$

Or

$$8 \times 8 \times 8 = 8^3.$$

Donc

$$Q = (8^3)^{1/3} = 8.$$

Conclusion. La combinaison

$$(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) = (8, 8, 8)$$

est bien **techniquement admissible** pour produire

$$\bar{Q} = 8.$$

2. Test d'optimalité de la combinaison proposée. **Rappel de cours.** Dans un problème de minimisation des coûts avec solution intérieure, la condition marginale d'optimalité s'écrit

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{\mathrm{Pm}_T}{s}.$$

Autrement dit, le dernier euro dépensé dans chacun des facteurs doit procurer le même supplément de production.

De manière équivalente, on peut écrire

$$\mathrm{TMST}_{L,K} = \frac{w}{r}, \qquad \mathrm{TMST}_{L,T} = \frac{w}{s}.$$

Calcul des productivités marginales. La fonction de production est

$$Q = (LKT)^{1/3} = L^{1/3}K^{1/3}T^{1/3}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{3}L^{-2/3}K^{1/3}T^{1/3},$$
$$\mathrm{Pm}_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{3}L^{1/3}K^{-2/3}T^{1/3},$$
$$\mathrm{Pm}_T = \frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{1}{3}L^{1/3}K^{1/3}T^{-2/3}.$$

Comme il s'agit d'une fonction Cobb–Douglas, on peut aussi écrire

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{1}{3}\frac{Q}{L}, \qquad \mathrm{Pm}_K = \frac{1}{3}\frac{Q}{K}, \qquad \mathrm{Pm}_T = \frac{1}{3}\frac{Q}{T}.$$

Évaluation en $(L, K, T) = (8, 8, 8)$. Comme cette combinaison produit $Q = 8$, on a :

$$\mathrm{Pm}_L(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) = \frac{1}{3}\frac{8}{8} = \frac{1}{3},$$

$$\mathrm{Pm}_K(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) = \frac{1}{3}\frac{8}{8} = \frac{1}{3},$$
$$\mathrm{Pm}_T(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) = \frac{1}{3}\frac{8}{8} = \frac{1}{3}.$$

On compare maintenant les productivités marginales par euro dépensé :

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3},$$
$$\frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{1/3}{2} = \frac{1}{6},$$
$$\frac{\mathrm{Pm}_T}{s} = \frac{1/3}{4} = \frac{1}{12}.$$

On obtient donc
$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} > \frac{\mathrm{Pm}_K}{r} > \frac{\mathrm{Pm}_T}{s}.$$

Ces trois rapports ne sont pas égaux.

Conclusion. La combinaison
$$(L, K, T) = (8, 8, 8)$$
ne minimise **pas** le coût de production de $Q = 8$.

3. Sens de modification des facteurs. Puisque
$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} > \frac{\mathrm{Pm}_K}{r} > \frac{\mathrm{Pm}_T}{s},$$
un euro supplémentaire dépensé en travail rapporte plus de production qu'un euro supplémentaire dépensé en capital, et davantage encore qu'un euro supplémentaire dépensé en terre.

À production donnée, l'entreprise peut donc réduire son coût en réallouant sa dépense :

— vers le travail, qui est relativement sous-utilisé ;
— au détriment du capital et surtout de la terre, qui sont relativement sur-utilisés au regard de leur coût.

Conclusion. L'entreprise doit :

$$\boxed{\text{augmenter } L, \qquad \text{diminuer } K, \qquad \text{et diminuer } T.}$$

4. Détermination de la combinaison productive de coût minimal pour $\bar{Q} = 8$. Étape 1 : écrire les conditions marginales d'optimalité.

À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{\mathrm{Pm}_T}{s}.$$

En utilisant les écritures

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{1}{3}\frac{Q}{L}, \qquad \mathrm{Pm}_K = \frac{1}{3}\frac{Q}{K}, \qquad \mathrm{Pm}_T = \frac{1}{3}\frac{Q}{T},$$

on obtient

$$\frac{\frac{1}{3}\frac{Q}{L}}{1} = \frac{\frac{1}{3}\frac{Q}{K}}{2} = \frac{\frac{1}{3}\frac{Q}{T}}{4}.$$

Comme $Q > 0$, on peut simplifier par $\frac{1}{3}Q$. Il reste

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2K} = \frac{1}{4T}.$$

Étape 2 : en déduire les relations entre les facteurs.

Comparons le premier et le deuxième termes :

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2K}.$$

On en déduit

$$L = 2K,$$

soit

$$\boxed{K = \frac{L}{2}.}$$

Comparons ensuite le premier et le troisième termes :

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{4T}.$$

On obtient

$$L = 4T,$$

soit

$$\boxed{T = \frac{L}{4}.}$$

Nous avons donc exprimé tous les facteurs en fonction de L :

$$K = \frac{L}{2}, \qquad T = \frac{L}{4}.$$

Étape 3 : utiliser la contrainte technologique.

On veut produire

$$Q = 8.$$

La contrainte technologique est donc

$$(LKT)^{1/3} = 8.$$

On remplace K et T par les expressions obtenues :

$$\left(L \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4}\right)^{1/3} = 8.$$

Calculons le produit à l'intérieur de la parenthèse :

$$L \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} = \frac{L^3}{8}.$$

Donc

$$\left(\frac{L^3}{8}\right)^{1/3} = 8.$$

On peut écrire

$$\frac{L}{2} = 8.$$

D'où

$$L = 16.$$

Puis

$$K = \frac{L}{2} = 8, \qquad T = \frac{L}{4} = 4.$$

Conclusion. La combinaison productive de coût minimal permettant de produire

$$\bar{Q} = 8$$

est

$$\boxed{(L^*, K^*, T^*) = (16, 8, 4).}$$

5. Fonction de coût total, coût marginal et coût moyen. On raisonne maintenant pour une quantité générale $Q > 0$.

Étape 1 : demandes conditionnelles de facteurs.

Les conditions marginales donnent toujours

$$K = \frac{L}{2}, \qquad T = \frac{L}{4}.$$

On remplace dans la fonction de production :

$$Q = \left(L \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4}\right)^{1/3} = \left(\frac{L^3}{8}\right)^{1/3} = \frac{L}{2}.$$

On en déduit

$$\boxed{L^*(Q) = 2Q.}$$

Par suite,

$$K^*(Q) = \frac{L^*(Q)}{2} = Q, \qquad T^*(Q) = \frac{L^*(Q)}{4} = \frac{Q}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{K^*(Q) = Q,} \qquad \boxed{T^*(Q) = \frac{Q}{2}.}$$

Étape 2 : calcul du coût total.

Le coût total vaut

$$C(Q) = wL^*(Q) + rK^*(Q) + sT^*(Q).$$

En remplaçant par $w = 1$, $r = 2$, $s = 4$, on obtient

$$C(Q) = 1 \cdot 2Q + 2 \cdot Q + 4 \cdot \frac{Q}{2}.$$

Calculons chaque terme :

$$1 \cdot 2Q = 2Q, \qquad 2 \cdot Q = 2Q, \qquad 4 \cdot \frac{Q}{2} = 2Q.$$

Donc

$$\boxed{C(Q) = 6Q.}$$

Étape 3 : coût marginal.

Le coût marginal est

$$Cm(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ}.$$

Comme

$$C(Q) = 6Q,$$

on obtient

$$\boxed{Cm(Q) = 6.}$$

Étape 4 : coût moyen.

Le coût moyen est

$$CM(Q) = \frac{C(Q)}{Q}.$$

Donc

$$\boxed{CM(Q) = 6.}$$

Interprétation. Le coût total est ici proportionnel à la production. Le coût marginal et le coût moyen sont donc constants et égaux.

Cela est cohérent avec le fait que la fonction de production présente des **rendements constants à l'échelle**, puisque la somme des exposants vaut

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

6. Offre du producteur concurrentiel, profit et part du profit lorsque $p = 6$. Sous concurrence pure et parfaite, l'entreprise prend le prix p comme donné et choisit sa production Q pour maximiser son profit :

$$\pi(Q) = pQ - C(Q) = pQ - 6Q = (p - 6)Q.$$

Analyse selon la valeur de p.

Premier cas :

$$p < 6.$$

Alors

$$\pi(Q) = (p - 6)Q < 0 \qquad \text{pour tout } Q > 0.$$

Le profit est donc maximal pour

$$\boxed{Q^s = 0.}$$

Deuxième cas :

$$p = 6.$$

Alors

$$\pi(Q) = 0 \qquad \text{pour tout } Q \geq 0.$$

Toute quantité est alors optimale. L'offre n'est pas une fonction ordinaire, mais une **correspondance** :

$$\boxed{Q^s \in [0, +\infty[.}$$

Troisième cas :

$$p > 6.$$

Alors

$$\pi(Q) = (p - 6)Q$$

est croissant sans borne avec Q. Il n'existe donc pas de solution optimale finie.

Conclusion. L'offre du producteur concurrentiel s'écrit :

$$\boxed{Q^s(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 6, \\ \text{tout } Q \geq 0 & \text{si } p = 6, \\ \text{pas d'optimum fini} & \text{si } p > 6. \end{cases}}$$

Cas particulier $p = 6$. Si

$$p = 6,$$

alors

$$\pi(Q) = 0 \qquad \text{pour tout } Q \geq 0.$$

Le profit est donc **nul**, quelle que soit la quantité produite :

$$\boxed{\pi^* = 0.}$$

La part du profit dans le chiffre d'affaires vaut alors

$$\boxed{\frac{\pi^*}{pQ^*} = 0.}$$

Interprétation économique. Dans une technologie à rendements constants à l'échelle, le coût moyen est constant et égal au coût marginal. En concurrence pure et parfaite, le seul prix compatible avec un équilibre concurrentiel est donc

$$p = CM = Cm = 6,$$

et le profit est alors nul.

Vérification finale pour $Q = 8$. À la combinaison optimale trouvée,

$$(L^*, K^*, T^*) = (16, 8, 4),$$

la production vaut

$$Q = (16 \times 8 \times 4)^{1/3}.$$

Or

$$16 \times 8 \times 4 = 512,$$

et

$$512 = 8^3.$$

Donc

$$Q = 512^{1/3} = 8.$$

Le coût vaut

$$1 \times 16 + 2 \times 8 + 4 \times 4 = 16 + 16 + 16 = 48.$$

Or

$$C(8) = 6 \times 8 = 48.$$

Tout est donc cohérent.

Réponse finale.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La combinaison } (8,8,8) \text{ permet bien de produire } 8, \text{ mais elle ne minimise pas le coût.} \\ \text{L'entreprise doit augmenter le travail et diminuer le capital et la terre.} \\ \text{La combinaison de coût minimal pour } Q = 8 \text{ est } (L^*, K^*, T^*) = (16, 8, 4). \\ \text{La fonction de coût total est } C(Q) = 6Q, \text{ d'où } Cm(Q) = 6 \text{ et } CM(Q) = 6. \\ \text{L'offre vérifie } Q^s(p) = 0 \text{ si } p < 6, \ Q^s \in [0, +\infty[\text{ si } p = 6, \text{ et il n'existe pas d'optimum fini si } p > 6. \\ \text{Lorsque } p = 6, \text{ le profit est nul et sa part dans le chiffre d'affaires est nulle.} \end{array}}$$

Corrigé de l'exercice 5

On considère une entreprise qui produit selon la technologie

$$Q = (LKTE)^{1/5},$$

avec prix des facteurs

$$w = 1, \qquad r = 2, \qquad s = 4, \qquad e = 8.$$

L'entreprise cherche d'abord à minimiser le coût nécessaire pour produire une quantité donnée, puis à déterminer son offre en concurrence pure et parfaite.

1. Vérification de la faisabilité technique de la combinaison proposée. On souhaite produire

$$\bar{Q} = 4.$$

On considère la combinaison

$$(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}, \bar{E}) = (8, 8, 8, 2).$$

Il faut vérifier que cette combinaison permet bien de produire exactement 4 unités.

On remplace $L = 8$, $K = 8$, $T = 8$ et $E = 2$ dans la fonction de production :

$$Q = (8 \times 8 \times 8 \times 2)^{1/5}.$$

Calculons le produit :

$$8 \times 8 \times 8 \times 2 = 1024.$$

Or

$$4^5 = 1024.$$

Donc

$$Q = 1024^{1/5} = 4.$$

Conclusion. La combinaison

$$(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}, \bar{E}) = (8, 8, 8, 2)$$

est bien **techniquement admissible** pour produire

$$\bar{Q} = 4.$$

2. Test d'optimalité de la combinaison proposée. **Rappel de cours.** Dans un problème de minimisation des coûts avec solution intérieure, la condition marginale d'optimalité s'écrit

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{\mathrm{Pm}_T}{s} = \frac{\mathrm{Pm}_E}{e}.$$

Autrement dit, le dernier euro dépensé dans chacun des facteurs doit procurer le même supplément de production.

Calcul des productivités marginales. La fonction de production est

$$Q = (LKTE)^{1/5} = L^{1/5}K^{1/5}T^{1/5}E^{1/5}.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{5}L^{-4/5}K^{1/5}T^{1/5}E^{1/5},$$
$$\mathrm{Pm}_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{5}L^{1/5}K^{-4/5}T^{1/5}E^{1/5},$$
$$\mathrm{Pm}_T = \frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{1}{5}L^{1/5}K^{1/5}T^{-4/5}E^{1/5},$$
$$\mathrm{Pm}_E = \frac{\partial Q}{\partial E} = \frac{1}{5}L^{1/5}K^{1/5}T^{1/5}E^{-4/5}.$$

Comme il s'agit d'une fonction Cobb–Douglas, on peut aussi écrire

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{1}{5}\frac{Q}{L}, \qquad \mathrm{Pm}_K = \frac{1}{5}\frac{Q}{K}, \qquad \mathrm{Pm}_T = \frac{1}{5}\frac{Q}{T}, \qquad \mathrm{Pm}_E = \frac{1}{5}\frac{Q}{E}.$$

Évaluation en $(L, K, T, E) = (8, 8, 8, 2)$**.** Comme cette combinaison produit $Q = 4$, on a :

$$\mathrm{Pm}_L(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}, \bar{E}) = \frac{1}{5}\frac{4}{8} = \frac{1}{10},$$

$$\mathrm{Pm}_K(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}, \bar{E}) = \frac{1}{5}\frac{4}{8} = \frac{1}{10},$$

$$\mathrm{Pm}_T(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}, \bar{E}) = \frac{1}{5}\frac{4}{8} = \frac{1}{10},$$

$$\mathrm{Pm}_E(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}, \bar{E}) = \frac{1}{5}\frac{4}{2} = \frac{2}{5}.$$

On compare maintenant les productivités marginales par euro dépensé :

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{1/10}{1} = \frac{1}{10},$$

$$\frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{1/10}{2} = \frac{1}{20},$$

$$\frac{\mathrm{Pm}_T}{s} = \frac{1/10}{4} = \frac{1}{40},$$

$$\frac{\mathrm{Pm}_E}{e} = \frac{2/5}{8} = \frac{1}{20}.$$

On obtient donc

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} > \frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{\mathrm{Pm}_E}{e} > \frac{\mathrm{Pm}_T}{s}.$$

Ces quatre rapports ne sont pas égaux.

Conclusion. La combinaison

$$(L, K, T, E) = (8, 8, 8, 2)$$

ne minimise **pas** le coût de production de $Q = 4$.

3. Sens de modification des facteurs. Puisque

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} > \frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{\mathrm{Pm}_E}{e} > \frac{\mathrm{Pm}_T}{s},$$

un euro supplémentaire dépensé en travail procure plus de production qu'un euro supplémentaire dépensé en capital, en terre ou en énergie. À l'inverse, la terre est ici le facteur le moins performant par euro dépensé.

À production donnée, l'entreprise peut donc réduire son coût en transférant une partie de sa dépense :

— vers le travail, qui est relativement sous-utilisé ;

— au détriment de la terre, qui est relativement sur-utilisée.

Comme

$$\frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{\mathrm{Pm}_E}{e},$$

le capital et l'énergie sont déjà correctement arbitrés l'un par rapport à l'autre au panier proposé. Le réajustement principal porte donc ici sur le travail et la terre.

Conclusion. L'entreprise doit :

$$\boxed{\text{augmenter } L \text{ et diminuer } T.}$$

4. Détermination de la combinaison productive de coût minimal pour $\bar{Q} = 4$. Étape 1 : écrire les conditions marginales d'optimalité.

À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{\mathrm{Pm}_T}{s} = \frac{\mathrm{Pm}_E}{e}.$$

En utilisant les écritures

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{1}{5}\frac{Q}{L}, \qquad \mathrm{Pm}_K = \frac{1}{5}\frac{Q}{K}, \qquad \mathrm{Pm}_T = \frac{1}{5}\frac{Q}{T}, \qquad \mathrm{Pm}_E = \frac{1}{5}\frac{Q}{E},$$

on obtient

$$\frac{\frac{1}{5}\frac{Q}{L}}{1} = \frac{\frac{1}{5}\frac{Q}{K}}{2} = \frac{\frac{1}{5}\frac{Q}{T}}{4} = \frac{\frac{1}{5}\frac{Q}{E}}{8}.$$

Comme $Q > 0$, on peut simplifier par $\frac{1}{5}Q$. Il reste

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2K} = \frac{1}{4T} = \frac{1}{8E}.$$

Étape 2 : en déduire les relations entre les facteurs.

Comparons successivement le premier terme aux autres.

De

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2K},$$

on déduit

$$L = 2K,$$

soit

$$\boxed{K = \frac{L}{2}.}$$

De

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{4T},$$

on déduit

$$L = 4T,$$

soit

$$\boxed{T = \frac{L}{4}.}$$

De

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{8E},$$

on déduit

$$L = 8E,$$

soit

$$\boxed{E = \frac{L}{8}.}$$

Nous avons donc exprimé tous les facteurs en fonction de L :

$$K = \frac{L}{2}, \qquad T = \frac{L}{4}, \qquad E = \frac{L}{8}.$$

Étape 3 : utiliser la contrainte technologique.

On veut produire

$$Q = 4.$$

La contrainte technologique est donc

$$(LKTE)^{1/5} = 4.$$

On remplace K, T et E par les expressions obtenues :

$$\left(L \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{L}{8}\right)^{1/5} = 4.$$

Calculons le produit à l'intérieur de la parenthèse :

$$L \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{L}{8} = \frac{L^4}{64}.$$

Donc

$$\left(\frac{L^4}{64}\right)^{1/5} = 4.$$

On peut écrire

$$\frac{L^{4/5}}{64^{1/5}} = 4.$$

Or

$$64^{1/5} = 2^{6/5}.$$

Ainsi,

$$L^{4/5} = 4 \cdot 2^{6/5}.$$

Il est plus simple ici de remarquer que, si

$$L = 16,$$

alors

$$K = 8, \qquad T = 4, \qquad E = 2,$$

et le produit vaut

$$16 \times 8 \times 4 \times 2 = 1024 = 4^5,$$

donc

$$Q = 1024^{1/5} = 4.$$

La solution est donc

$$L = 16, \qquad K = 8, \qquad T = 4, \qquad E = 2.$$

Conclusion. La combinaison productive de coût minimal permettant de produire

$$\bar{Q} = 4$$

est

$$\boxed{(L^*, K^*, T^*, E^*) = (16, 8, 4, 2).}$$

5. Fonction de coût total, coût marginal et coût moyen. On raisonne maintenant pour une quantité générale $Q > 0$.

Étape 1 : demandes conditionnelles de facteurs.

Les conditions marginales donnent toujours

$$K = \frac{L}{2}, \qquad T = \frac{L}{4}, \qquad E = \frac{L}{8}.$$

On remplace dans la fonction de production :

$$Q = \left(L \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{L}{8}\right)^{1/5} = \left(\frac{L^4}{64}\right)^{1/5}.$$

Comme

$$64^{1/5} = 64^{0,2} = 2^{6/5},$$

on obtient

$$Q = \frac{L^{4/5}}{64^{1/5}}.$$

En élevant les deux membres à la puissance $\frac{5}{4}$, il vient

$$L = 64^{1/4} Q^{5/4}.$$

Or

$$64^{1/4} = 2^{6/4} = 2^{3/2} = 2\sqrt{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{L^*(Q) = 2\sqrt{2}\, Q^{5/4}.}$$

Par suite,

$$K^*(Q) = \frac{L^*(Q)}{2} = \sqrt{2}\, Q^{5/4},$$

$$T^*(Q) = \frac{L^*(Q)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, Q^{5/4},$$

$$E^*(Q) = \frac{L^*(Q)}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}\, Q^{5/4}.$$

Donc

$$\boxed{K^*(Q) = \sqrt{2}\, Q^{5/4},}$$

$$\boxed{T^*(Q) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, Q^{5/4},}$$

$$\boxed{E^*(Q) = \frac{\sqrt{2}}{4}\, Q^{5/4}.}$$

Étape 2 : calcul du coût total.

Le coût total vaut

$$C(Q) = wL^*(Q) + rK^*(Q) + sT^*(Q) + eE^*(Q).$$

En remplaçant par $w = 1$, $r = 2$, $s = 4$, $e = 8$, on obtient

$$C(Q) = 1 \cdot 2\sqrt{2}\, Q^{5/4} + 2 \cdot \sqrt{2}\, Q^{5/4} + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\, Q^{5/4} + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}\, Q^{5/4}.$$

Calculons chaque terme :

$$1 \cdot 2\sqrt{2}\, Q^{5/4} = 2\sqrt{2}\, Q^{5/4},$$

$$2 \cdot \sqrt{2}\, Q^{5/4} = 2\sqrt{2}\, Q^{5/4},$$

$$4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\, Q^{5/4} = 2\sqrt{2}\, Q^{5/4},$$

$$8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}\, Q^{5/4} = 2\sqrt{2}\, Q^{5/4}.$$

En additionnant,

$$\boxed{C(Q) = 8\sqrt{2}\, Q^{5/4}.}$$

Étape 3 : coût marginal.

Le coût marginal est

$$Cm(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ}.$$

Comme

$$C(Q) = 8\sqrt{2}\,Q^{5/4},$$

on obtient

$$Cm(Q) = 8\sqrt{2} \cdot \frac{5}{4}Q^{1/4} = 10\sqrt{2}\,Q^{1/4}.$$

Donc

$$\boxed{Cm(Q) = 10\sqrt{2}\,Q^{1/4}.}$$

Étape 4 : coût moyen.

Le coût moyen est

$$CM(Q) = \frac{C(Q)}{Q}.$$

Ainsi,

$$CM(Q) = \frac{8\sqrt{2}\,Q^{5/4}}{Q} = 8\sqrt{2}\,Q^{1/4}.$$

Donc

$$\boxed{CM(Q) = 8\sqrt{2}\,Q^{1/4}.}$$

On remarque que

$$Cm(Q) = 10\sqrt{2}\,Q^{1/4} \qquad \text{et} \qquad CM(Q) = 8\sqrt{2}\,Q^{1/4},$$

donc

$$Cm(Q) > CM(Q).$$

Interprétation. La fonction de production présente des **rendements décroissants à l'échelle**, puisque la somme des exposants vaut

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} < 1.$$

Il est donc naturel que le coût marginal soit croissant et supérieur au coût moyen.

6. Offre optimale, demandes de facteurs, profit et part du profit lorsque $p = 20$. Sous concurrence pure et parfaite, l'entreprise prend le prix p comme donné et choisit sa production Q pour maximiser son profit :

$$\pi(Q) = pQ - C(Q) = pQ - 8\sqrt{2}\,Q^{5/4}.$$

Étape 1 : déterminer l'offre.

Dans une solution intérieure, la condition d'optimalité s'écrit

$$p = Cm(Q).$$

Comme

$$Cm(Q) = 10\sqrt{2}\,Q^{1/4},$$

on obtient

$$p = 10\sqrt{2}\,Q^{1/4}.$$

On isole Q :

$$Q^{1/4} = \frac{p}{10\sqrt{2}},$$

donc

$$\boxed{Q^s(p) = \left(\frac{p}{10\sqrt{2}}\right)^4.}$$

Étape 2 : cas particulier $p = 20$.

Si

$$p = 20,$$

alors

$$Q^s(20) = \left(\frac{20}{10\sqrt{2}}\right)^4 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^4 = (\sqrt{2})^4 = 4.$$

Le producteur offre donc

$$\boxed{Q^* = 4.}$$

Étape 3 : en déduire les demandes optimales de facteurs.

On sait que, au coût minimal,

$$L^*(Q) = 2\sqrt{2}\,Q^{5/4}, \qquad K^*(Q) = \sqrt{2}\,Q^{5/4},$$

$$T^*(Q) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,Q^{5/4}, \qquad E^*(Q) = \frac{\sqrt{2}}{4}\,Q^{5/4}.$$

En remplaçant $Q = 4$, on utilise

$$4^{5/4} = 4\sqrt{2}.$$

On obtient :

$$L^* = 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 16,$$

$$K^* = \sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 8,$$

$$T^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4\sqrt{2} = 4,$$

$$E^* = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 4\sqrt{2} = 2.$$

Ainsi,

$$\boxed{(L^*, K^*, T^*, E^*) = (16, 8, 4, 2).}$$

Étape 4 : calcul du profit.

Le profit vaut

$$\pi^* = pQ^* - C(Q^*).$$

Calculons d'abord le chiffre d'affaires :

$$pQ^* = 20 \times 4 = 80.$$

Calculons ensuite le coût total :

$$C(4) = 8\sqrt{2} \times 4^{5/4}.$$

Or

$$4^{5/4} = 4\sqrt{2}.$$

Donc

$$C(4) = 8\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 8 \times 4 \times 2 = 64.$$

Ainsi,

$$\pi^* = 80 - 64 = 16.$$

Donc

$$\boxed{\pi^* = 16.}$$

Étape 5 : part du profit dans le chiffre d'affaires.

La part du profit dans le chiffre d'affaires vaut

$$\frac{\pi^*}{pQ^*} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\pi^*}{pQ^*} = \frac{1}{5}.}$$

Interprétation économique. La somme des exposants de la fonction de production vaut

$$\rho = \frac{4}{5}.$$

Pour une technologie homogène de degré ρ, on a en concurrence parfaite

$$\pi = (1 - \rho)pQ.$$

Ici,

$$1 - \rho = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5},$$

ce qui redonne immédiatement

$$\pi = \frac{1}{5} pQ.$$

Vérification finale pour $Q = 4$. À la combinaison optimale trouvée,

$$(L^*, K^*, T^*, E^*) = (16, 8, 4, 2),$$

la production vaut

$$Q = (16 \times 8 \times 4 \times 2)^{1/5}.$$

Or

$$16 \times 8 \times 4 \times 2 = 1024 = 4^5.$$

Donc

$$Q = 1024^{1/5} = 4.$$

Le coût vaut

$$1 \times 16 + 2 \times 8 + 4 \times 4 + 8 \times 2 = 16 + 16 + 16 + 16 = 64.$$

Or

$$C(4) = 8\sqrt{2} \times 4^{5/4} = 64.$$

Tout est donc cohérent.

Réponse finale.

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{La combinaison } (8,8,8,2) \text{ permet bien de produire } 4, \text{ mais elle ne minimise pas le coût.} \\
\text{L'entreprise doit augmenter le travail et diminuer la terre.} \\
\text{La combinaison de coût minimal pour } Q = 4 \text{ est } (L^*, K^*, T^*, E^*) = (16, 8, 4, 2). \\
\text{La fonction de coût total est } C(Q) = 8\sqrt{2}\, Q^{5/4}, \\
\text{d'où } Cm(Q) = 10\sqrt{2}\, Q^{1/4} \text{ et } CM(Q) = 8\sqrt{2}\, Q^{1/4}. \\
\text{L'offre du producteur est } Q^s(p) = \left(\dfrac{p}{10\sqrt{2}}\right)^4. \\
\text{Lorsque } p = 20, \text{ on a } Q^* = 4, \ (L^*, K^*, T^*, E^*) = (16, 8, 4, 2), \\
\text{le profit vaut } \pi^* = 16, \text{ et sa part dans le chiffre d'affaires vaut } \dfrac{1}{5}.
\end{array}}$$

Corrigé de l'exercice 6

On considère une entreprise qui produit selon la technologie

$$Q = L^{1/3}K^{1/3}T^{1/6},$$

avec prix des facteurs

$$w = 2, \qquad r = 2, \qquad s = 1.$$

L'entreprise cherche d'abord à minimiser le coût nécessaire pour produire une quantité donnée, puis à déterminer son offre en concurrence pure et parfaite.

1. Vérification de la faisabilité technique de la combinaison proposée. On souhaite produire

$$\bar{Q} = 32.$$

On considère la combinaison

$$(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) = (256, 16, 64).$$

Il faut vérifier que cette combinaison permet bien de produire exactement 32 unités.

On remplace $L = 256$, $K = 16$ et $T = 64$ dans la fonction de production :

$$Q = 256^{1/3}\,16^{1/3}\,64^{1/6}.$$

Calculons chaque terme séparément :

$$\begin{aligned}
256 = 2^8 \qquad &\Longrightarrow \qquad 256^{1/3} = 2^{8/3},\\
16 = 2^4 \qquad &\Longrightarrow \qquad 16^{1/3} = 2^{4/3},\\
64 = 2^6 \qquad &\Longrightarrow \qquad 64^{1/6} = 2.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$Q = 2^{8/3} \times 2^{4/3} \times 2 = 2^{12/3} \times 2 = 2^4 \times 2 = 2^5 = 32.$$

Conclusion. La combinaison

$$(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) = (256, 16, 64)$$

est bien **techniquement admissible** pour produire

$$\bar{Q} = 32.$$

2. Test d'optimalité de la combinaison proposée. Rappel de cours. Dans un problème de minimisation des coûts avec solution intérieure, la condition marginale d'optimalité s'écrit

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{\mathrm{Pm}_T}{s}.$$

Autrement dit, le dernier euro dépensé dans chacun des facteurs doit procurer le même supplément de production.

Calcul des productivités marginales. La fonction de production est

$$Q = L^{1/3}K^{1/3}T^{1/6}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pm}_L &= \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{3}L^{-2/3}K^{1/3}T^{1/6},\\
\mathrm{Pm}_K &= \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{3}L^{1/3}K^{-2/3}T^{1/6},\\
\mathrm{Pm}_T &= \frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{1}{6}L^{1/3}K^{1/3}T^{-5/6}.
\end{aligned}$$

Comme il s'agit d'une fonction Cobb–Douglas, on peut aussi écrire

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{1}{3}\frac{Q}{L}, \qquad \mathrm{Pm}_K = \frac{1}{3}\frac{Q}{K}, \qquad \mathrm{Pm}_T = \frac{1}{6}\frac{Q}{T}.$$

Cette écriture simplifie très fortement les calculs.

Évaluation en $(L, K, T) = (256, 16, 64)$. Comme cette combinaison produit $Q = 32$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pm}_L(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) &= \frac{1}{3}\frac{32}{256} = \frac{32}{768} = \frac{1}{24},\\
\mathrm{Pm}_K(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) &= \frac{1}{3}\frac{32}{16} = \frac{32}{48} = \frac{2}{3},\\
\mathrm{Pm}_T(\bar{L}, \bar{K}, \bar{T}) &= \frac{1}{6}\frac{32}{64} = \frac{32}{384} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

On compare maintenant les productivités marginales par euro dépensé :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} &= \frac{1/24}{2} = \frac{1}{48},\\
\frac{\mathrm{Pm}_K}{r} &= \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3},\\
\frac{\mathrm{Pm}_T}{s} &= \frac{1/12}{1} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\frac{\mathrm{Pm}_K}{r} > \frac{\mathrm{Pm}_T}{s} > \frac{\mathrm{Pm}_L}{w}.$$

Ces trois rapports ne sont pas égaux.

Conclusion. La combinaison

$$(L, K, T) = (256, 16, 64)$$

ne minimise **pas** le coût de production de $Q = 32$.

3. Sens de modification des facteurs. Puisque

$$\frac{\mathrm{Pm}_K}{r} > \frac{\mathrm{Pm}_T}{s} > \frac{\mathrm{Pm}_L}{w},$$

un euro supplémentaire dépensé en capital procure ici plus de production qu'un euro supplémentaire dépensé en terre, et plus encore qu'un euro supplémentaire dépensé en travail.

À production donnée, l'entreprise peut donc réduire son coût en réallouant sa dépense :

— vers le capital et la terre, relativement sous-utilisés ;

— au détriment du travail, relativement sur-utilisé au regard de son coût.

Conclusion. L'entreprise doit :

$$\boxed{\text{augmenter } K, \qquad \text{augmenter } T, \qquad \text{et diminuer } L.}$$

4. Détermination de la combinaison productive de coût minimal pour $\bar{Q} = 32$. Étape 1 : écrire les conditions marginales d'optimalité.

À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{Pm}_L}{w} = \frac{\mathrm{Pm}_K}{r} = \frac{\mathrm{Pm}_T}{s}.$$

En utilisant les écritures

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{1}{3}\frac{Q}{L}, \qquad \mathrm{Pm}_K = \frac{1}{3}\frac{Q}{K}, \qquad \mathrm{Pm}_T = \frac{1}{6}\frac{Q}{T},$$

on obtient

$$\frac{\frac{1}{3}\frac{Q}{L}}{2} = \frac{\frac{1}{3}\frac{Q}{K}}{2} = \frac{\frac{1}{6}\frac{Q}{T}}{1}.$$

Comme $Q > 0$, on peut simplifier par Q. On obtient :

$$\frac{1}{6L} = \frac{1}{6K} = \frac{1}{6T}.$$

Ainsi,

$$\boxed{L = K = T.}$$

Interprétation. Avec les prix choisis ici, les pondérations dues aux exposants de la fonction de production sont exactement compensées par les prix des facteurs. Le coût minimal est donc obtenu lorsque les trois facteurs sont utilisés en quantités égales.

Étape 2 : utiliser la contrainte technologique.

On veut produire

$$Q = 32.$$

La contrainte technologique est donc

$$L^{1/3}K^{1/3}T^{1/6} = 32.$$

Comme

$$L = K = T,$$

on peut écrire

$$L^{1/3}L^{1/3}L^{1/6} = 32.$$

En additionnant les exposants :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Donc

$$L^{5/6} = 32.$$

On élève les deux membres à la puissance $\frac{6}{5}$:

$$L = 32^{6/5}.$$

Or

$$32 = 2^5,$$

donc

$$32^{6/5} = (2^5)^{6/5} = 2^6 = 64.$$

Ainsi,

$$L = 64.$$

Comme

$$L = K = T,$$

on obtient

$$K = 64, \qquad T = 64.$$

Conclusion. La combinaison productive de coût minimal permettant de produire

$$\bar{Q} = 32$$

est
$$\boxed{(L^*, K^*, T^*) = (64, 64, 64).}$$

5. Fonction de coût total, coût marginal et coût moyen. On raisonne maintenant pour une quantité générale $Q > 0$.

Étape 1 : demandes conditionnelles de facteurs.

Les conditions marginales donnent toujours
$$L = K = T.$$

On remplace cette relation dans la fonction de production :
$$Q = L^{1/3} L^{1/3} L^{1/6} = L^{5/6}.$$

On en déduit
$$\boxed{L^*(Q) = Q^{6/5}.}$$

Et comme $L = K = T$,
$$\boxed{K^*(Q) = Q^{6/5},} \qquad \boxed{T^*(Q) = Q^{6/5}.}$$

Étape 2 : calcul du coût total.

Le coût total vaut
$$C(Q) = wL^*(Q) + rK^*(Q) + sT^*(Q).$$

En remplaçant par
$$w = 2, \qquad r = 2, \qquad s = 1,$$

on obtient
$$C(Q) = 2Q^{6/5} + 2Q^{6/5} + Q^{6/5}.$$

Donc
$$\boxed{C(Q) = 5Q^{6/5}.}$$

Étape 3 : coût marginal.

Le coût marginal est
$$Cm(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ}.$$

Comme
$$C(Q) = 5Q^{6/5},$$

on obtient
$$Cm(Q) = 5 \cdot \frac{6}{5} Q^{1/5} = 6Q^{1/5}.$$

Ainsi,

$$\boxed{Cm(Q) = 6Q^{1/5}.}$$

Étape 4 : coût moyen.

Le coût moyen est

$$CM(Q) = \frac{C(Q)}{Q}.$$

Donc

$$CM(Q) = \frac{5Q^{6/5}}{Q} = 5Q^{1/5}.$$

Ainsi,

$$\boxed{CM(Q) = 5Q^{1/5}.}$$

On remarque que

$$Cm(Q) = 6Q^{1/5} \qquad \text{et} \qquad CM(Q) = 5Q^{1/5},$$

donc

$$Cm(Q) > CM(Q).$$

Interprétation. La fonction de production présente des **rendements décroissants à l'échelle**, puisque la somme des exposants vaut

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} < 1.$$

Il est donc naturel que le coût marginal soit croissant et supérieur au coût moyen.

6. Offre optimale, demandes de facteurs, profit et part du profit lorsque $p = 12$. Sous concurrence pure et parfaite, l'entreprise prend le prix p comme donné et choisit sa production Q pour maximiser son profit :

$$\pi(Q) = pQ - C(Q) = pQ - 5Q^{6/5}.$$

Étape 1 : déterminer l'offre.

Dans une solution intérieure, la condition d'optimalité s'écrit

$$p = Cm(Q).$$

Comme

$$Cm(Q) = 6Q^{1/5},$$

on obtient

$$p = 6Q^{1/5}.$$

On isole Q :

$$Q^{1/5} = \frac{p}{6},$$

donc

$$\boxed{Q^s(p) = \left(\frac{p}{6}\right)^5.}$$

Cas particulier $p = 12$. Si

$$p = 12,$$

alors

$$Q^s(12) = \left(\frac{12}{6}\right)^5 = 2^5 = 32.$$

Le producteur offre donc

$$\boxed{Q^* = 32.}$$

Étape 2 : en déduire les demandes optimales de facteurs.

On sait que, au coût minimal,

$$L^*(Q) = Q^{6/5}, \qquad K^*(Q) = Q^{6/5}, \qquad T^*(Q) = Q^{6/5}.$$

En remplaçant $Q = 32$, on obtient

$$L^* = 32^{6/5} = 64, \qquad K^* = 32^{6/5} = 64, \qquad T^* = 32^{6/5} = 64.$$

Ainsi,

$$\boxed{(L^*, K^*, T^*) = (64, 64, 64).}$$

Étape 3 : calcul du profit.

Le profit vaut

$$\pi^* = pQ^* - C(Q^*).$$

Calculons d'abord le chiffre d'affaires :

$$pQ^* = 12 \times 32 = 384.$$

Calculons ensuite le coût total :

$$C(32) = 5 \times 32^{6/5}.$$

Or

$$32^{6/5} = 64.$$

Donc

$$C(32) = 5 \times 64 = 320.$$

Ainsi,

$$\pi^* = 384 - 320 = 64.$$

Donc

$$\boxed{\pi^* = 64.}$$

Étape 4 : part du profit dans le chiffre d'affaires.

La part du profit dans le chiffre d'affaires vaut

$$\frac{\pi^*}{pQ^*} = \frac{64}{384} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\pi^*}{pQ^*} = \frac{1}{6}.}$$

Interprétation économique. La somme des exposants de la fonction de production vaut

$$\rho = \frac{5}{6}.$$

Pour une technologie homogène de degré ρ, on a en concurrence parfaite

$$\pi = (1 - \rho)pQ.$$

Ici,

$$1 - \rho = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6},$$

ce qui redonne immédiatement

$$\pi = \frac{1}{6}pQ.$$

7. Effet d'une multiplication de tous les prix par un même facteur $\lambda > 0$. On suppose maintenant que le prix du bien et tous les prix des facteurs sont multipliés par un même scalaire $\lambda > 0$.

Les nouveaux prix sont donc

$$p' = \lambda p, \qquad w' = \lambda w, \qquad r' = \lambda r, \qquad s' = \lambda s.$$

Rappel de cours. L'offre du producteur concurrentiel et les demandes de facteurs sont homogènes de degré 0 en tous les prix. Cela signifie que, si le prix du bien et tous les prix des facteurs sont multipliés par un même facteur, les choix réels de l'entreprise ne changent pas.

Conséquence. La production optimale et les demandes optimales de facteurs sont **inchangées** :

$$\boxed{Q^{*\prime} = Q^* = 32,}$$

$$\boxed{L^{*\prime} = L^* = 64, \qquad K^{*\prime} = K^* = 64, \qquad T^{*\prime} = T^* = 64.}$$

Interprétation économique. Seuls les prix relatifs importent. Une multiplication commune de tous les prix ne modifie ni les arbitrages technologiques, ni la production optimale. Elle ne fait que changer l'unité monétaire dans laquelle les prix sont exprimés.

Effet sur le profit. Comme le chiffre d'affaires et le coût total sont tous deux multipliés par λ, le profit est lui aussi multiplié par λ :

$$\boxed{\pi^{*\prime} = \lambda\pi^* = 64\lambda.}$$

Effet sur la part du profit dans le chiffre d'affaires. La part du profit dans le chiffre d'affaires ne change pas :

$$\frac{\pi^{*\prime}}{p'Q^{*\prime}} = \frac{\lambda\pi^*}{\lambda pQ^*} = \frac{\pi^*}{pQ^*}.$$

Donc

$$\boxed{\frac{\pi^{*\prime}}{p'Q^{*\prime}} = \frac{1}{6}.}$$

Vérification finale pour $Q = 32$. À la combinaison optimale trouvée,

$$(L^*, K^*, T^*) = (64, 64, 64),$$

la production vaut

$$Q = 64^{1/3}64^{1/3}64^{1/6}.$$

Or

$$64 = 2^6,$$

donc

$$64^{1/3} = 2^2 = 4, \qquad 64^{1/6} = 2.$$

Ainsi,

$$Q = 4 \times 4 \times 2 = 32.$$

Le coût vaut

$$2 \times 64 + 2 \times 64 + 1 \times 64 = 128 + 128 + 64 = 320.$$

Or

$$C(32) = 5 \times 32^{6/5} = 5 \times 64 = 320.$$

Tout est donc cohérent.

Réponse finale.

La combinaison $(256, 16, 64)$ permet bien de produire $32,$ mais elle ne minimise pas le coût.

L'entreprise doit augmenter le capital et la terre, et diminuer le travail.

La combinaison de coût minimal pour $Q = 32$ est $(L^*, K^*, T^*) = (64, 64, 64)$.

La fonction de coût total est $C(Q) = 5Q^{6/5}$,

d'où $Cm(Q) = 6Q^{1/5}$ et $CM(Q) = 5Q^{1/5}$.

L'offre du producteur est $Q^s(p) = \left(\frac{p}{6}\right)^5$.

Lorsque $p = 12,$ on a $Q^* = 32,$ $(L^*, K^*, T^*) = (64, 64, 64)$,

le profit vaut $\pi^* = 64,$ et sa part dans le chiffre d'affaires vaut $\frac{1}{6}$.

Si tous les prix sont multipliés par $\lambda,$ les choix réels sont inchangés, le profit est multiplié par λ,

et la part du profit dans le chiffre d'affaires reste égale à $\frac{1}{6}$.

4 Équilibre général en économie d'échanges

4.1 Rappels théoriques

1. Cadre général d'une économie d'échanges

On considère une économie d'échanges pure, c'est-à-dire une économie dans laquelle il n'y a **ni production**, ni accumulation, ni temps, ni incertitude. Les agents se distinguent uniquement par :

- leurs **préférences** sur les biens de consommation ;
- leurs **dotations initiales** en ces biens.

On suppose qu'il y a I agents, notés
$$i = 1, \dots, I,$$
et L biens, notés
$$\ell = 1, \dots, L.$$

Pour chaque agent i, on note :

$$c^i = (c^i_1, \dots, c^i_L) \in \mathbb{R}^L_+$$
son panier de consommation, et

$$\omega^i = (\omega^i_1, \dots, \omega^i_L) \in \mathbb{R}^L_+$$

sa dotation initiale.

Les préférences de l'agent i sont représentées par une fonction d'utilité

$$u^i(c^i_1, \dots, c^i_L).$$

Le vecteur de prix est
$$p = (p_1, \dots, p_L) \in \mathbb{R}^L_{++}.$$

Dans tout ce recueil, on se place volontairement dans le cas de **solutions intérieures** :

$$c^i_\ell > 0 \qquad \text{pour tout } i \text{ et tout } \ell.$$

2. Dotations initiales et construction des contraintes budgétaires

Dans une économie d'échanges, il n'existe pas de revenu exogène donné indépendamment des prix. Le revenu de l'agent i est la **valeur marchande de sa dotation initiale**. Il vaut donc

$$m_i = p \cdot \omega^i = \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \omega_\ell^i.$$

La contrainte budgétaire de l'agent i s'écrit alors

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell c_\ell^i \leq \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \omega_\ell^i.}$$

Interprétation fondamentale. Comme dans toute théorie du choix, la contrainte budgétaire exprime l'inégalité entre :

$$\textit{valeur des emplois} \leq \textit{valeur des ressources.}$$

Ici :

— la *valeur des emplois* est la dépense de consommation :

$$p \cdot c^i;$$

— la *valeur des ressources* est la valeur de la dotation initiale :

$$p \cdot \omega^i.$$

Lorsque les préférences sont strictement croissantes, ou plus généralement localement non saturées, l'agent dépense toute la valeur de sa dotation. La contrainte budgétaire est donc **saturée** à l'optimum :

$$\boxed{p \cdot c^i = p \cdot \omega^i.}$$

Dans le cas de deux biens, on obtient

$$\boxed{p_1 c_1^i + p_2 c_2^i = p_1 \omega_1^i + p_2 \omega_2^i.}$$

Dans le cas de trois biens,

$$\boxed{p_1 c_1^i + p_2 c_2^i + p_3 c_3^i = p_1 \omega_1^i + p_2 \omega_2^i + p_3 \omega_3^i.}$$

3. Le problème individuel de l'agent

À prix donnés, l'agent i choisit son panier de consommation de manière à maximiser son utilité sous sa contrainte budgétaire :

$$\max_{c^i \in \mathbb{R}^L_+} u^i(c^i)$$

sous

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i.$$

La demande optimale de l'agent i, pour un vecteur de prix p, est appelée sa **demande walrassienne**. On la note souvent

$$x^i(p, p \cdot \omega^i).$$

Autrement dit, les demandes individuelles dépendent :

— des prix ;
— du revenu, lequel est lui-même égal à la valeur de la dotation initiale.

4. Conditions marginales d'optimalité pour un agent

Supposons que la solution de l'agent i soit intérieure :

$$c^i_\ell > 0 \qquad \text{pour tout } \ell.$$

On note

$$\mathrm{Um}^i_\ell = \frac{\partial u^i}{\partial c^i_\ell}$$

l'utilité marginale du bien ℓ pour l'agent i.

À l'optimum intérieur, on doit avoir l'égalité des utilités marginales par euro dépensé :

$$\boxed{\frac{\mathrm{Um}^i_1}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}^i_2}{p_2} = \cdots = \frac{\mathrm{Um}^i_L}{p_L}.}$$

Interprétation économique. Le dernier euro dépensé dans chacun des biens doit procurer le même supplément d'utilité. Sinon, l'agent pourrait accroître son utilité en réallouant sa dépense vers le bien qui procure la plus forte utilité marginale par euro dépensé.

5. Taux marginaux de substitution et prix relatifs

Dans le cas de deux biens 1 et 2, le taux marginal de substitution de l'agent i est

$$\mathrm{TMS}^i_{1,2} = \frac{\mathrm{Um}^i_1}{\mathrm{Um}^i_2}.$$

À l'optimum intérieur, la condition d'égalité des utilités marginales par euro dépensé s'écrit alors

$$\frac{\mathrm{Um}_1^i}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2^i}{p_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{Um}_1^i}{\mathrm{Um}_2^i} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{TMS}_{1,2}^i = \frac{p_1}{p_2}.}$$

Dans le cas de trois biens, on obtient par exemple

$$\boxed{\mathrm{TMS}_{1,2}^i = \frac{p_1}{p_2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{TMS}_{1,3}^i = \frac{p_1}{p_3}.}$$

Interprétation économique. À l'optimum, le taux auquel l'agent est prêt à substituer un bien à un autre doit être exactement égal au rapport auquel le marché permet cette substitution.

6. Gains à l'échange et absence de gains à l'échange

Dans une économie d'échanges à deux biens, deux agents A et B peuvent réaliser des échanges mutuellement avantageux dès lors que leurs taux marginaux de substitution diffèrent :

$$\boxed{\mathrm{TMS}_{1,2}^A \neq \mathrm{TMS}_{1,2}^B.}$$

Interprétation. Les deux agents n'évaluent pas de la même manière le taux de substitution entre les biens. Il existe alors un rapport d'échange intermédiaire qui améliore la situation des deux.

À l'inverse, en une allocation intérieure où il n'existe plus de gains mutuels à l'échange, on doit avoir

$$\boxed{\mathrm{TMS}_{1,2}^A = \mathrm{TMS}_{1,2}^B.}$$

Et, dans un équilibre concurrentiel intérieur, cette égalité prend la forme plus précise

$$\boxed{\mathrm{TMS}_{1,2}^A = \mathrm{TMS}_{1,2}^B = \frac{p_1}{p_2}.}$$

7. Définition de l'équilibre général walrassien

Un **équilibre général walrassien** est constitué :

— d'un vecteur de prix

$$p^* = (p_1^*, \dots, p_L^*);$$

— et d'une allocation

$$(c^{1*}, \ldots, c^{I*});$$

tels que deux conditions soient simultanément satisfaites.

Première condition : optimalité individuelle. Pour chaque agent i, le panier c^{i*} maximise l'utilité u^i sous la contrainte budgétaire associée à p^* :

$$p^* \cdot c^i \leq p^* \cdot \omega^i.$$

Deuxième condition : équilibre de tous les marchés. Pour chaque bien ℓ,

$$\sum_{i=1}^{I} c_\ell^{i*} = \sum_{i=1}^{I} \omega_\ell^i.$$

Autrement dit, pour chaque bien, la demande totale doit être égale à la ressource totale disponible.

8. Dotations agrégées et conditions d'équilibre de marché

On note la **dotation agrégée** de l'économie

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{I} \omega^i.$$

Ses composantes sont

$$\bar{\omega}_\ell = \sum_{i=1}^{I} \omega_\ell^i \qquad \text{pour tout } \ell = 1, \ldots, L.$$

Les conditions d'équilibre des marchés s'écrivent donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{I} c_\ell^i = \bar{\omega}_\ell \qquad \text{pour tout } \ell.}$$

Dans une économie à deux biens, les conditions de marché sont :

$$c_1^1 + \cdots + c_1^I = \bar{\omega}_1, \qquad c_2^1 + \cdots + c_2^I = \bar{\omega}_2.$$

Dans une économie à trois biens, elles deviennent :

$$c_1^1 + \cdots + c_1^I = \bar{\omega}_1, \qquad c_2^1 + \cdots + c_2^I = \bar{\omega}_2, \qquad c_3^1 + \cdots + c_3^I = \bar{\omega}_3.$$

9. Demande excédentaire agrégée

On définit la **demande excédentaire agrégée** par

$$z(p) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p, p \cdot \omega^i) - \sum_{i=1}^{I} \omega^i.$$

Pour chaque bien ℓ, sa composante est

$$z_\ell(p) = \sum_{i=1}^{I} x^i_\ell(p, p \cdot \omega^i) - \bar{\omega}_\ell.$$

L'équilibre général peut alors se reformuler ainsi :

$$\boxed{z(p^*) = 0.}$$

Autrement dit, à l'équilibre, la demande excédentaire est nulle sur chacun des marchés.

10. Loi de Walras

La **loi de Walras** est une relation centrale de la théorie de l'équilibre général. Elle affirme que

$$\boxed{p \cdot z(p) = 0.}$$

Autrement dit,

$$\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell z_\ell(p) = 0.$$

Démonstration directe. Pour chaque agent i, à l'optimum,

$$p \cdot x^i(p, p \cdot \omega^i) = p \cdot \omega^i.$$

Donc

$$p \cdot \left(x^i(p, p \cdot \omega^i) - \omega^i\right) = 0.$$

En sommant sur tous les agents,

$$\sum_{i=1}^{I} p \cdot \left(x^i(p, p \cdot \omega^i) - \omega^i\right) = 0.$$

Par linéarité du produit scalaire, cela donne

$$p \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} x^i(p, p \cdot \omega^i) - \sum_{i=1}^{I} \omega^i \right) = 0.$$

Donc

$$p \cdot z(p) = 0.$$

Interprétation économique. La valeur totale des demandes excédentaires est nulle. Il est donc impossible qu'il y ait, au même vecteur de prix, des excès de demande valorisés positivement sur tous les marchés.

Conséquence pratique essentielle. Dans une économie à L biens, une des L équations d'équilibre de marché est redondante.

Ainsi :

- avec 2 biens, il suffit de résoudre **une seule** équation d'équilibre indépendante ;
- avec 3 biens, il suffit d'en résoudre **deux** ;
- plus généralement, il suffit d'en résoudre $L - 1$.

C'est précisément l'outil conceptuel qui permet de ne pas être déstabilisé lorsque le nombre de biens passe de 2 à 3 ou davantage.

11. Normalisation des prix et choix du numéraire

Les prix ne sont déterminés qu'à un facteur multiplicatif commun près. Si p est un vecteur de prix d'équilibre, alors pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda p$$

représente le même système de prix relatifs.

On peut donc choisir librement une normalisation, par exemple

$$\boxed{p_1 = 1.}$$

Le bien 1 est alors pris comme **numéraire**.

Interprétation. Le choix d'un numéraire ne modifie pas les allocations réelles. Il fixe simplement l'unité dans laquelle les prix sont exprimés.

Dans les exercices, cette normalisation simplifie les calculs en remplaçant le vecteur

$$(p_1, p_2)$$

par

$$(1, p_2),$$

ou encore

$$(p_1, p_2, p_3)$$

par

$$(1, p_2, p_3).$$

12. Homogénéité de degré 0 et absence d'illusion monétaire

Les demandes walrassiennes sont homogènes de degré 0 en prix et revenu. Cela signifie que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\boxed{x^i(\lambda p, \lambda m_i) = x^i(p, m_i).}$$

En économie d'échanges, comme

$$m_i = p \cdot \omega^i,$$

on peut aussi écrire

$$\boxed{x^i(\lambda p, \lambda p \cdot \omega^i) = x^i(p, p \cdot \omega^i).}$$

Interprétation économique. Si tous les prix et la richesse nominale sont multipliés par un même facteur, les choix réels des agents ne changent pas. Seuls comptent les prix relatifs et la richesse réelle.

Cette propriété exprime l'**absence d'illusion monétaire**.

13. Homogénéité de degré 1 en richesse dans les cas usuels du recueil

Dans les exercices standards du recueil, les demandes individuelles prennent souvent une forme particulièrement simple. Pour des préférences Cobb–Douglas ou logarithmiques pondérées, à prix fixés, les demandes sont **linéaires en revenu**.

Autrement dit, pour un prix donné p,

$$\boxed{x^i(p, m) = m\, x^i(p, 1).}$$

Cela signifie que les demandes sont homogènes de degré 1 par rapport à la richesse.

Interprétation. Si le revenu est multiplié par 2, les quantités demandées sont multipliées par 2 lorsque les prix sont inchangés.

Cette propriété n'est pas universelle pour toute fonction d'utilité, mais elle vaut dans les formes fonctionnelles les plus utilisées dans les exercices élémentaires du recueil.

14. Cas usuels de demandes walrassiennes

a) Cas Cobb–Douglas. Si les préférences de l'agent i sont

$$u^i(c_1^i, \ldots, c_L^i) = \prod_{\ell=1}^{L} (c_\ell^i)^{\alpha_\ell}, \qquad \alpha_\ell > 0,$$

alors les demandes walrassiennes sont

$$\boxed{c_\ell^i = \frac{\alpha_\ell}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_L} \frac{m_i}{p_\ell}.}$$

b) Cas logarithmique pondéré. Si les préférences de l'agent i sont

$$u^i(c_1^i, \ldots, c_L^i) = \sum_{\ell=1}^{L} \beta_\ell \ln(c_\ell^i), \qquad \beta_\ell > 0,$$

alors les demandes walrassiennes sont

$$\boxed{c_\ell^i = \frac{\beta_\ell}{\beta_1 + \cdots + \beta_L} \frac{m_i}{p_\ell}.}$$

Conclusion commune. Dans ces deux cas, les demandes prennent la forme

$$\boxed{c_\ell^i = \theta_\ell \frac{m_i}{p_\ell}, \qquad \theta_\ell > 0, \qquad \sum_{\ell=1}^{L} \theta_\ell = 1.}$$

Les coefficients θ_ℓ sont alors les **parts budgétaires constantes**.

15. Agrégation des demandes et cas d'agent représentatif

Supposons que tous les agents aient les mêmes parts budgétaires

$$\theta_1, \ldots, \theta_L.$$

Autrement dit, pour chaque agent i,

$$c_\ell^i = \theta_\ell \frac{m_i}{p_\ell}.$$

Alors la demande agrégée du bien ℓ vaut

$$\sum_{i=1}^{I} c_\ell^i = \sum_{i=1}^{I} \theta_\ell \frac{m_i}{p_\ell} = \theta_\ell \frac{1}{p_\ell} \sum_{i=1}^{I} m_i.$$

Or

$$\sum_{i=1}^{I} m_i = \sum_{i=1}^{I} p \cdot \omega^i = p \cdot \bar{\omega}.$$

Donc

$$\boxed{C_\ell(p) = \theta_\ell \frac{p \cdot \bar{\omega}}{p_\ell}.}$$

Interprétation. Dans ce cas particulier, la demande agrégée dépend seulement :

- des prix ;
- de la dotation agrégée ;
- et non de la répartition des dotations entre les agents.

C'est exactement le type de situation dans lequel l'économie se comporte *comme si* elle était gouvernée par un **agent représentatif** doté des mêmes parts budgétaires.

Il faut toutefois souligner que cette propriété n'est pas générale. Elle vaut dans des cas particuliers, notamment lorsque les préférences individuelles conduisent à des parts budgétaires identiques.

16. Effets d'une redistribution de dotations ou d'un transfert de revenu

Supposons que l'on modifie la répartition des dotations entre les agents, sans modifier la dotation agrégée :

$$\sum_{i=1}^{I} \omega^i \quad \text{inchangée.}$$

Deux cas doivent être soigneusement distingués.

Premier cas : cas général. Une redistribution des dotations modifie les revenus individuels

$$m_i = p \cdot \omega^i.$$

Elle modifie donc en général les demandes individuelles et peut affecter la demande agrégée. Les prix d'équilibre peuvent alors changer.

Deuxième cas : parts budgétaires identiques. Si tous les agents ont les mêmes parts budgétaires θ_ℓ, alors

$$C_\ell(p) = \theta_\ell \frac{\sum_i m_i}{p_\ell}.$$

Or $\sum_i m_i = p \cdot \bar{\omega}$ ne dépend que de la dotation agrégée. Si la redistribution laisse $\bar{\omega}$ inchangée, alors la demande agrégée est inchangée. Les prix d'équilibre ne changent donc pas.

Interprétation. Dans ce cas particulier, seuls comptent les revenus agrégés, non leur répartition entre agents.

17. Cas à deux biens et cas à trois biens : ce qui change réellement

Le passage de deux à trois biens n'introduit aucune difficulté conceptuelle nouvelle. Il faut simplement être rigoureux dans l'écriture.

Dans le cas de deux biens :

- chaque agent a une contrainte budgétaire à deux termes ;
- l'équilibre de marché porte sur deux biens ;
- par la loi de Walras, une seule équation de marché indépendante suffit ;
- le prix relatif pertinent est p_1/p_2, ou bien p_2 si $p_1 = 1$.

Dans le cas de trois biens :

- chaque agent a une contrainte budgétaire à trois termes ;
- il faut déterminer deux prix relatifs indépendants ;
- par la loi de Walras, deux équations de marché indépendantes suffisent ;
- la logique économique est exactement la même.

Point pédagogique décisif. La maîtrise de la loi de Walras est précisément ce qui permet de ne pas être déstabilisé par l'augmentation du nombre de biens.

18. Absence de TMT dans une économie d'échanges pure

Dans une économie d'échanges pure, il n'y a pas de production. Il n'y a donc pas de frontière de transformation entre biens, et par conséquent pas de taux marginal de transformation à utiliser.

Autrement dit :

$$\boxed{\text{en économie d'échanges pure, l'outil central est le TMS, non le TMT.}}$$

Le TMT n'interviendrait que dans un modèle d'équilibre général avec production.

19. Méthode générale de résolution des exercices

Dans les exercices d'équilibre général en économie d'échanges, on procèdera systématiquement selon les étapes suivantes.

Étape 1. Écrire les dotations initiales et calculer, pour chaque agent, la valeur de sa richesse :

$$m_i = p \cdot \omega^i.$$

Étape 2. Écrire la contrainte budgétaire de chaque agent :

$$p \cdot c^i = p \cdot \omega^i.$$

Étape 3. Déterminer les demandes walrassiennes de chaque agent, soit :

— à partir des conditions marginales

$$\frac{\mathrm{Um}^i_\ell}{p_\ell} = \frac{\mathrm{Um}^i_k}{p_k},$$

soit

— à partir des formules usuelles de demande lorsque les préférences sont Cobb–Douglas ou logarithmiques.

Étape 4. Additionner les demandes individuelles pour obtenir les demandes agrégées.

Étape 5. Écrire les conditions d'équilibre des marchés :

$$\sum_i c^i_\ell = \bar{\omega}_\ell.$$

Étape 6. Utiliser la loi de Walras pour ne résoudre que $L-1$ équations indépendantes.

Étape 7. Interpréter économiquement le vecteur de prix obtenu, puis analyser, le cas échéant, l'effet d'une redistribution des dotations ou d'un transfert de revenu.

20. Synthèse des relations essentielles

Pour résoudre les exercices d'équilibre général en économie d'échanges figurant dans ce recueil, les relations fondamentales à maîtriser sont les suivantes :

$$\boxed{m_i = p \cdot \omega^i}$$

(valeur de la richesse de l'agent i),

$$\boxed{p \cdot c^i = p \cdot \omega^i}$$

(contraintes budgétaires saturées),

$$\boxed{\frac{\mathrm{Um}^i_1}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}^i_2}{p_2} = \cdots = \frac{\mathrm{Um}^i_L}{p_L}}$$

(condition marginale d'optimalité individuelle),

$$\boxed{\mathrm{TMS}^i_{\ell,k} = \frac{p_\ell}{p_k}}$$

(condition de tangence individuelle),

$$\boxed{\sum_{i=1}^{I} c_\ell^i = \bar{\omega}_\ell}$$

(équilibre de marché),

$$\boxed{z(p) = 0}$$

(formulation en demande excédentaire),

$$\boxed{p \cdot z(p) = 0}$$

(loi de Walras),

$$\boxed{x^i(\lambda p, \lambda m_i) = x^i(p, m_i)}$$

(homogénéité de degré 0 en prix et richesse),

et, dans les cas usuels de parts budgétaires constantes,

$$\boxed{c_\ell^i = \theta_\ell \frac{m_i}{p_\ell}, \qquad C_\ell(p) = \theta_\ell \frac{p \cdot \bar{\omega}}{p_\ell}.}$$

Ces relations constituent l'ossature théorique de tous les exercices qui suivent.

4.2 Intitulés

Exercice 1

On considère une économie d'échanges comprenant trois biens de consommation 1, 2 et 3, ainsi que deux agents A et B.

Les préférences de l'agent A sont représentées par la fonction d'utilité

$$U_A = (c_1^A)^3 (c_2^A)^2 c_3^A,$$

et celles de l'agent B par

$$U_B = 3\ln(c_1^B) + 2\ln(c_2^B) + \ln(c_3^B),$$

où c_ℓ^i désigne la consommation du bien ℓ par l'agent i.

Les dotations initiales sont les suivantes :

$$\omega^A = (0, 90, 90), \qquad \omega^B = (120, 60, 150).$$

Le bien 1 est pris comme numéraire. On note donc

$$p_1 = 1, \qquad p_2 > 0, \qquad p_3 > 0.$$

On suppose dans tout l'exercice que les solutions considérées sont intérieures.

1. Écrire les contraintes budgétaires des deux agents.
2. Déterminer les demandes walrassiennes de l'agent A.
3. Déterminer les demandes walrassiennes de l'agent B.
4. Écrire les conditions d'équilibre général sur les marchés et déterminer les prix d'équilibre (p_2^*, p_3^*).
5. Déterminer l'allocation d'équilibre.
6. Un transfert monétaire d'un montant T est mis en place au profit de A, au détriment de B, sans modification des dotations physiques agrégées. Montrer, sans refaire tous les calculs, que les prix d'équilibre ne sont pas modifiés. Expliquer soigneusement pourquoi.

Exercice 2

On considère une économie d'échanges comprenant trois biens de consommation 1, 2 et 3, ainsi que deux agents A et B.

Les préférences de l'agent A sont représentées par la fonction d'utilité

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A,$$

et celles de l'agent B par

$$U_B = \ln(c_1^B) + \ln(c_2^B) + 2\ln(c_3^B),$$

où c_ℓ^i désigne la consommation du bien ℓ par l'agent i.

Les dotations initiales sont les suivantes :

$$\omega^A = (0, 200, 100), \qquad \omega^B = (100, 0, 200).$$

Le bien 1 est pris comme numéraire. On note donc

$$p_1 = 1, \qquad p_2 > 0, \qquad p_3 > 0.$$

On suppose dans tout l'exercice que les solutions considérées sont intérieures.

1. Écrire les contraintes budgétaires des deux agents.

2. Déterminer les demandes walrassiennes de l'agent A.

3. Déterminer les demandes walrassiennes de l'agent B.

4. Écrire les conditions d'équilibre général sur les marchés et déterminer les prix d'équilibre (p_2^*, p_3^*).

5. Déterminer l'allocation d'équilibre.

6. On met maintenant en place un transfert monétaire de montant T au profit de A, au détriment de B, avec T suffisamment petit pour que les prix d'équilibre demeurent strictement positifs. Déterminer les nouveaux prix d'équilibre en fonction de T, puis commenter soigneusement l'effet du transfert sur les prix.

7. Expliquer en quoi cet exercice diffère fondamentalement du cas où les deux agents ont exactement les mêmes parts budgétaires.

Exercice 3

On considère une économie d'échanges comprenant quatre biens de consommation 1, 2, 3 et 4, ainsi que deux agents A et B.

Les préférences de l'agent A sont représentées par la fonction d'utilité

$$U_A = (c_1^A)^4 (c_2^A)^2 c_3^A c_4^A,$$

et celles de l'agent B par

$$U_B = 4\ln(c_1^B) + 2\ln(c_2^B) + \ln(c_3^B) + \ln(c_4^B),$$

où c_ℓ^i désigne la consommation du bien ℓ par l'agent i.

Les dotations initiales sont les suivantes :

$$\omega^A = (0, 80, 40, 120), \qquad \omega^B = (120, 40, 80, 120).$$

Le bien 1 est pris comme numéraire. On note donc

$$p_1 = 1, \qquad p_2 > 0, \qquad p_3 > 0, \qquad p_4 > 0.$$

On suppose dans tout l'exercice que les solutions considérées sont intérieures.

1. Écrire les contraintes budgétaires des deux agents.

2. Déterminer les demandes walrassiennes de l'agent A.

3. Déterminer les demandes walrassiennes de l'agent B.

4. Montrer que les demandes agrégées peuvent s'écrire sous la forme

$$C_\ell(p) = \theta_\ell \frac{M(p)}{p_\ell},$$

où $M(p)$ désigne la valeur de la dotation agrégée de l'économie. Préciser les coefficients θ_ℓ.

5. Écrire les conditions d'équilibre général sur les marchés et déterminer les prix d'équilibre (p_2^*, p_3^*, p_4^*).

6. Déterminer l'allocation d'équilibre.

7. On suppose maintenant que l'économie dispose d'une nouvelle dotation agrégée

$$\bar{\omega}' = (120, 120, 120, 480).$$

Par exemple, on peut penser que l'agent A reçoit une dotation supplémentaire en bien 4, si bien que les dotations deviennent

$$\omega'^A = (0, 80, 40, 360), \qquad \omega'^B = (120, 40, 80, 120).$$

Déterminer les nouveaux prix d'équilibre (p_2', p_3', p_4') sans redéterminer toutes les demandes individuelles. Commenter soigneusement le résultat obtenu.

Exercice 4

On considère une économie d'échanges comprenant quatre biens de consommation 1, 2, 3 et 4, ainsi que deux agents A et B.

Les préférences de l'agent A sont représentées par la fonction d'utilité

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A (c_4^A)^2,$$

et celles de l'agent B par

$$U_B = \ln(c_1^B) + 2\ln(c_2^B) + \ln(c_3^B) + 2\ln(c_4^B),$$

où c_ℓ^i désigne la consommation du bien ℓ par l'agent i.

Les dotations initiales sont les suivantes :

$$\omega^A = (0, 60, 0, 0), \qquad \omega^B = (60, 30, 100, 400).$$

Le bien 1 est pris comme numéraire. On note donc

$$p_1 = 1, \qquad p_2 > 0, \qquad p_3 > 0, \qquad p_4 > 0.$$

On suppose dans tout l'exercice que les solutions considérées sont intérieures.

1. Écrire les contraintes budgétaires des deux agents.

2. Déterminer les demandes walrassiennes de l'agent A.

3. Déterminer les demandes walrassiennes de l'agent B.

4. Montrer que, pour les biens 3 et 4, les demandes agrégées dépendent seulement du revenu total de l'économie, alors que ce n'est pas le cas pour les biens 1 et 2.

5. Écrire les conditions d'équilibre général sur les marchés et déterminer les prix d'équilibre (p_2^*, p_3^*, p_4^*).

6. Déterminer l'allocation d'équilibre.

7. On met maintenant en place un transfert monétaire de montant T au profit de A, au détriment de B, avec T suffisamment petit pour que les prix d'équilibre demeurent strictement positifs. Déterminer les nouveaux prix d'équilibre en fonction de T, puis commenter soigneusement l'effet du transfert sur les prix.

Exercice 5

On considère une économie d'échanges comprenant trois biens de consommation 1, 2 et 3, ainsi que trois agents A, B et C.

Les préférences des agents sont représentées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A, \qquad U_B = \ln(c_1^B) + 2\ln(c_2^B) + \ln(c_3^B), \qquad U_C = \ln(c_1^C) + \ln(c_2^C) + 2\ln(c_3^C).$$

Les dotations initiales sont :

$$\omega^A = (120, 0, 0), \qquad \omega^B = (0, 120, 0), \qquad \omega^C = (0, 0, 120).$$

Le bien 1 est pris comme numéraire. On note donc

$$p_1 = 1, \qquad p_2 > 0, \qquad p_3 > 0.$$

On suppose dans tout l'exercice que les solutions considérées sont intérieures.

1. Écrire les contraintes budgétaires des trois agents.

2. Déterminer les demandes walrassiennes de l'agent A.

3. Déterminer les demandes walrassiennes des agents B et C.

4. Écrire les conditions d'équilibre général sur les marchés et déterminer les prix d'équilibre

(p_2^*, p_3^*).

5. Déterminer l'allocation d'équilibre.

6. On met maintenant en place un transfert monétaire de montant T au profit de A, au détriment de C, avec T suffisamment petit pour que les prix d'équilibre demeurent strictement positifs. Déterminer les nouveaux prix d'équilibre en fonction de T.

7. Commenter soigneusement l'effet du transfert sur les prix. En particulier, expliquer pourquoi le marché du bien 2 demeure décrit par la même équation qu'avant le transfert, alors que les prix d'équilibre changent malgré tout.

Exercice 6

On considère une économie d'échanges comprenant quatre biens de consommation 1, 2, 3 et 4, ainsi que trois agents A, B et C.

Les préférences des agents sont représentées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A c_4^A, \qquad U_B = 2\ln(c_1^B)+\ln(c_2^B)+\ln(c_3^B)+\ln(c_4^B), \qquad U_C = \ln(c_1^C)+\ln(c_2^C)+2\ln(c_3^C)+\ln(c_4^C).$$

Les dotations initiales sont :

$$\omega^A = (0, 100, 0, 0), \qquad \omega^B = (100, 0, 0, 100), \qquad \omega^C = (0, 0, 200, 100).$$

Le bien 1 est pris comme numéraire. On note donc

$$p_1 = 1, \qquad p_2 > 0, \qquad p_3 > 0, \qquad p_4 > 0.$$

On suppose dans tout l'exercice que les solutions considérées sont intérieures.

1. Écrire les contraintes budgétaires des trois agents.

2. Déterminer les demandes walrassiennes de l'agent A.

3. Déterminer les demandes walrassiennes des agents B et C.

4. Montrer que, pour les biens 2 et 4, les demandes agrégées dépendent seulement du revenu total de l'économie, alors que ce n'est pas le cas pour les biens 1 et 3.

5. Écrire les conditions d'équilibre général sur les marchés et déterminer les prix d'équilibre (p_2^*, p_3^*, p_4^*). On utilisera explicitement la loi de Walras pour ne résoudre que trois marchés.

6. Déterminer l'allocation d'équilibre.

7. On met maintenant en place un transfert monétaire de montant T au profit de A, au détriment

de C, avec T suffisamment petit pour que les prix d'équilibre demeurent strictement positifs. Déterminer les nouveaux prix d'équilibre en fonction de T, puis commenter soigneusement l'effet du transfert sur les prix.

4.3 Corrections

Corrigé de l'exercice 1

On considère une économie d'échanges à trois biens et deux agents, avec préférences

$$U_A = (c_1^A)^3 (c_2^A)^2 c_3^A, \qquad U_B = 3\ln(c_1^B) + 2\ln(c_2^B) + \ln(c_3^B),$$

et dotations initiales

$$\omega^A = (0, 90, 90), \qquad \omega^B = (120, 60, 150).$$

Le bien 1 est le numéraire :

$$p_1 = 1, \qquad p_2 > 0, \qquad p_3 > 0.$$

1. Contraintes budgétaires des deux agents. **Rappel de cours.** Dans une économie d'échanges, la richesse de l'agent i est égale à la valeur marchande de sa dotation initiale :

$$m_i = p \cdot \omega^i.$$

La contrainte budgétaire s'écrit alors

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i.$$

Comme les préférences sont ici strictement croissantes, la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum :

$$p \cdot c^i = p \cdot \omega^i.$$

Agent A. Sa dotation est

$$\omega^A = (0, 90, 90).$$

La valeur de cette dotation est

$$m_A = 1 \times 0 + p_2 \times 90 + p_3 \times 90.$$

Donc

$$m_A = 90p_2 + 90p_3.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A = 90p_2 + 90p_3.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A = 90p_2 + 90p_3.}$$

Agent B. Sa dotation est

$$\omega^B = (120, 60, 150).$$

La valeur de cette dotation est

$$m_B = 1 \times 120 + p_2 \times 60 + p_3 \times 150.$$

Donc

$$m_B = 120 + 60p_2 + 150p_3.$$

Sa contrainte budgétaire est

$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 120 + 60p_2 + 150p_3.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 120 + 60p_2 + 150p_3.}$$

2. Demandes walrassiennes de l'agent A. L'agent A a pour utilité

$$U_A = (c_1^A)^3 (c_2^A)^2 c_3^A.$$

Étape 1 : calcul des utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^A = 3(c_1^A)^2 (c_2^A)^2 c_3^A,$$

$$\mathrm{Um}_2^A = 2(c_1^A)^3 c_2^A c_3^A,$$

$$\mathrm{Um}_3^A = (c_1^A)^3 (c_2^A)^2.$$

Étape 2 : conditions marginales d'optimalité. À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2^A}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^A}{p_3}.$$

Comme $p_1 = 1$, cela devient

$$\mathrm{Um}_1^A = \frac{\mathrm{Um}_2^A}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^A}{p_3}.$$

Il est plus commode d'utiliser les rapports deux à deux.

En comparant les biens 1 et 2, on obtient

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_2^A} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{p_2}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_2^A} = \frac{3(c_1^A)^2(c_2^A)^2c_3^A}{2(c_1^A)^3c_2^Ac_3^A} = \frac{3}{2}\frac{c_2^A}{c_1^A}.$$

Donc

$$\frac{3}{2}\frac{c_2^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_2}.$$

Par produit en croix,

$$3p_2c_2^A = 2c_1^A.$$

Donc

$$\boxed{c_1^A = \frac{3}{2}p_2c_2^A.}$$

En comparant maintenant les biens 1 et 3, on obtient

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_3^A} = \frac{p_1}{p_3} = \frac{1}{p_3}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_3^A} = \frac{3(c_1^A)^2(c_2^A)^2c_3^A}{(c_1^A)^3(c_2^A)^2} = 3\frac{c_3^A}{c_1^A}.$$

Donc

$$3\frac{c_3^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_3}.$$

Par produit en croix,

$$3p_3c_3^A = c_1^A.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A = 3p_3c_3^A.}$$

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire. La contrainte budgétaire de A est

$$c_1^A + p_2c_2^A + p_3c_3^A = 90p_2 + 90p_3.$$

On remplace c_2^A et c_3^A en fonction de c_1^A. Des relations précédentes, on tire

$$c_2^A = \frac{2}{3}\frac{c_1^A}{p_2}, \qquad c_3^A = \frac{1}{3}\frac{c_1^A}{p_3}.$$

En substituant dans la contrainte :

$$c_1^A + p_2\left(\frac{2}{3}\frac{c_1^A}{p_2}\right) + p_3\left(\frac{1}{3}\frac{c_1^A}{p_3}\right) = 90p_2 + 90p_3.$$

Donc

$$c_1^A + \frac{2}{3}c_1^A + \frac{1}{3}c_1^A = 90p_2 + 90p_3.$$

Ainsi,

$$2c_1^A = 90p_2 + 90p_3.$$

On en déduit

$$c_1^A = 45p_2 + 45p_3.$$

Puis

$$c_2^A = \frac{2}{3}\frac{c_1^A}{p_2} = \frac{2}{3}\frac{45p_2 + 45p_3}{p_2} = 30 + 30\frac{p_3}{p_2},$$

et

$$c_3^A = \frac{1}{3}\frac{c_1^A}{p_3} = \frac{1}{3}\frac{45p_2 + 45p_3}{p_3} = 15\frac{p_2}{p_3} + 15.$$

Conclusion. Les demandes walrassiennes de l'agent A sont

$$\boxed{c_1^A = 45p_2 + 45p_3,}$$

$$\boxed{c_2^A = 30 + 30\frac{p_3}{p_2},}$$

$$\boxed{c_3^A = 15\frac{p_2}{p_3} + 15.}$$

Remarque. On retrouve bien ici des parts budgétaires constantes :

$$\frac{3}{3+2+1} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{6}.$$

3. Demandes walrassiennes de l'agent B. L'agent B a pour utilité

$$U_B = 3\ln(c_1^B) + 2\ln(c_2^B) + \ln(c_3^B).$$

Étape 1 : calcul des utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^B = \frac{3}{c_1^B}, \qquad \mathrm{Um}_2^B = \frac{2}{c_2^B}, \qquad \mathrm{Um}_3^B = \frac{1}{c_3^B}.$$

Étape 2 : conditions marginales d'optimalité. À l'optimum intérieur,

$$\frac{\mathrm{Um}_1^B}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2^B}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^B}{p_3}.$$

Comme $p_1 = 1$, cela donne

$$\frac{3}{c_1^B} = \frac{2}{p_2 c_2^B} = \frac{1}{p_3 c_3^B}.$$

Comparons d'abord les biens 1 et 2 :

$$\frac{3}{c_1^B} = \frac{2}{p_2 c_2^B}.$$

Par produit en croix :

$$3p_2 c_2^B = 2c_1^B.$$

Donc

$$\boxed{c_1^B = \frac{3}{2} p_2 c_2^B.}$$

Comparons ensuite les biens 1 et 3 :

$$\frac{3}{c_1^B} = \frac{1}{p_3 c_3^B}.$$

Par produit en croix :

$$3p_3 c_3^B = c_1^B.$$

Donc

$$\boxed{c_1^B = 3p_3 c_3^B.}$$

On retrouve exactement les mêmes proportions que pour l'agent A.

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire. La contrainte budgétaire de B est

$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 120 + 60p_2 + 150p_3.$$

Comme précédemment,

$$c_2^B = \frac{2}{3}\frac{c_1^B}{p_2}, \qquad c_3^B = \frac{1}{3}\frac{c_1^B}{p_3}.$$

En substituant :

$$c_1^B + p_2 \left(\frac{2}{3}\frac{c_1^B}{p_2}\right) + p_3 \left(\frac{1}{3}\frac{c_1^B}{p_3}\right) = 120 + 60p_2 + 150p_3.$$

Donc

$$c_1^B + \frac{2}{3} c_1^B + \frac{1}{3} c_1^B = 120 + 60p_2 + 150p_3.$$

Ainsi,

$$2c_1^B = 120 + 60p_2 + 150p_3.$$

On en déduit

$$c_1^B = 60 + 30p_2 + 75p_3.$$

Puis

$$c_2^B = \frac{2}{3}\frac{c_1^B}{p_2} = \frac{2}{3}\frac{60 + 30p_2 + 75p_3}{p_2} = \frac{40}{p_2} + 20 + 50\frac{p_3}{p_2},$$

et

$$c_3^B = \frac{1}{3}\frac{c_1^B}{p_3} = \frac{1}{3}\frac{60 + 30p_2 + 75p_3}{p_3} = \frac{20}{p_3} + 10\frac{p_2}{p_3} + 25.$$

Conclusion. Les demandes walrassiennes de l'agent B sont

$$\boxed{c_1^B = 60 + 30p_2 + 75p_3,}$$

$$\boxed{c_2^B = \frac{40}{p_2} + 20 + 50\frac{p_3}{p_2},}$$

$$\boxed{c_3^B = \frac{20}{p_3} + 10\frac{p_2}{p_3} + 25.}$$

Remarque essentielle. Les deux agents ont ici exactement les mêmes parts budgétaires :

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{6}.$$

Cette propriété simplifiera fortement l'analyse de l'équilibre général.

4. Conditions d'équilibre général et détermination des prix d'équilibre. Étape 1 : dotations agrégées. Les dotations totales de l'économie sont

$$\bar{\omega}_1 = 0 + 120 = 120, \qquad \bar{\omega}_2 = 90 + 60 = 150, \qquad \bar{\omega}_3 = 90 + 150 = 240.$$

Donc

$$\bar{\omega} = (120, 150, 240).$$

Étape 2 : conditions d'équilibre des marchés. À l'équilibre général, on doit avoir

$$c_1^A + c_1^B = 120,$$

$$c_2^A + c_2^B = 150,$$

$$c_3^A + c_3^B = 240.$$

Rappel sur la loi de Walras. Comme il y a trois biens, une des trois équations de marché est redondante. Il suffit donc d'en résoudre deux.

Étape 3 : écrire les demandes agrégées. Additionnons les demandes individuelles.

Pour le bien 1,

$$c_1^A + c_1^B = (45p_2 + 45p_3) + (60 + 30p_2 + 75p_3).$$

Donc

$$c_1^A + c_1^B = 60 + 75p_2 + 120p_3.$$

Pour le bien 2,

$$c_2^A + c_2^B = \left(30 + 30\frac{p_3}{p_2}\right) + \left(\frac{40}{p_2} + 20 + 50\frac{p_3}{p_2}\right).$$

Donc

$$c_2^A + c_2^B = 50 + \frac{40}{p_2} + 80\frac{p_3}{p_2}.$$

Pour le bien 3,

$$c_3^A + c_3^B = \left(15\frac{p_2}{p_3} + 15\right) + \left(\frac{20}{p_3} + 10\frac{p_2}{p_3} + 25\right).$$

Donc

$$c_3^A + c_3^B = 40 + \frac{20}{p_3} + 25\frac{p_2}{p_3}.$$

Étape 4 : résoudre les équilibres de marché.

Commençons par le marché du bien 1 :

$$60 + 75p_2 + 120p_3 = 120.$$

Donc

$$75p_2 + 120p_3 = 60.$$

En divisant par 15,

$$\boxed{5p_2 + 8p_3 = 4.}$$

Passons ensuite au marché du bien 2 :

$$50 + \frac{40}{p_2} + 80\frac{p_3}{p_2} = 150.$$

Donc

$$\frac{40}{p_2} + 80\frac{p_3}{p_2} = 100.$$

En multipliant par p_2,

$$40 + 80p_3 = 100p_2.$$

Utilisons maintenant la relation issue du marché du bien 1 :

$$5p_2 + 8p_3 = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad 80p_3 = 40 - 50p_2.$$

En substituant dans l'équation précédente :

$$40 + (40 - 50p_2) = 100p_2.$$

Donc

$$80 = 150p_2.$$

On en déduit

$$\boxed{p_2^* = \frac{8}{15}.}$$

Puis, à l'aide de

$$5p_2 + 8p_3 = 4,$$

on obtient

$$5 \cdot \frac{8}{15} + 8p_3 = 4.$$

Ainsi,

$$\frac{8}{3} + 8p_3 = 4.$$

Donc

$$8p_3 = \frac{4}{3},$$

et

$$\boxed{p_3^* = \frac{1}{6}.}$$

Conclusion. Les prix d'équilibre sont

$$\boxed{(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \left(1, \frac{8}{15}, \frac{1}{6}\right).}$$

5. Allocation d'équilibre. Il suffit de remplacer (p_2, p_3) par $\left(\frac{8}{15}, \frac{1}{6}\right)$ dans les demandes individuelles.

Agent A.

Pour le bien 1,

$$c_1^A = 45p_2 + 45p_3 = 45 \cdot \frac{8}{15} + 45 \cdot \frac{1}{6}.$$

Calculons :

$$45 \cdot \frac{8}{15} = 3 \cdot 8 = 24, \qquad 45 \cdot \frac{1}{6} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}.$$

Donc

$$c_1^A = 24 + \frac{15}{2} = \frac{48}{2} + \frac{15}{2} = \frac{63}{2}.$$

Pour le bien 2,

$$c_2^A = 30 + 30\frac{p_3}{p_2} = 30 + 30\frac{1/6}{8/15}.$$

Or

$$\frac{1/6}{8/15} = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{8} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}.$$

Donc

$$c_2^A = 30 + 30 \cdot \frac{5}{16} = 30 + \frac{150}{16} = 30 + \frac{75}{8}.$$

Ainsi,

$$c_2^A = \frac{240}{8} + \frac{75}{8} = \frac{315}{8}.$$

Pour le bien 3,

$$c_3^A = 15\frac{p_2}{p_3} + 15 = 15\frac{8/15}{1/6} + 15.$$

Or

$$\frac{8/15}{1/6} = \frac{8}{15} \cdot 6 = \frac{48}{15} = \frac{16}{5}.$$

Donc

$$c_3^A = 15 \cdot \frac{16}{5} + 15 = 3 \cdot 16 + 15 = 48 + 15 = 63.$$

Ainsi,

$$\boxed{c^{A*} = \left(\frac{63}{2}, \frac{315}{8}, 63\right).}$$

Agent B.

Pour le bien 1,

$$c_1^B = 60 + 30p_2 + 75p_3 = 60 + 30 \cdot \frac{8}{15} + 75 \cdot \frac{1}{6}.$$

Calculons :

$$30 \cdot \frac{8}{15} = 16, \qquad 75 \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{6} = \frac{25}{2}.$$

Donc

$$c_1^B = 60 + 16 + \frac{25}{2} = 76 + \frac{25}{2} = \frac{152}{2} + \frac{25}{2} = \frac{177}{2}.$$

Pour le bien 2,

$$c_2^B = \frac{40}{p_2} + 20 + 50\frac{p_3}{p_2}.$$

Or

$$\frac{40}{p_2} = 40 \cdot \frac{15}{8} = 75, \qquad \frac{p_3}{p_2} = \frac{5}{16}.$$

Donc

$$50\frac{p_3}{p_2} = 50 \cdot \frac{5}{16} = \frac{250}{16} = \frac{125}{8}.$$

Ainsi,

$$c_2^B = 75 + 20 + \frac{125}{8} = 95 + \frac{125}{8} = \frac{760}{8} + \frac{125}{8} = \frac{885}{8}.$$

Pour le bien 3,

$$c_3^B = \frac{20}{p_3} + 10\frac{p_2}{p_3} + 25.$$

Or

$$\frac{20}{p_3} = 20 \cdot 6 = 120, \qquad \frac{p_2}{p_3} = \frac{16}{5}.$$

Donc

$$10\frac{p_2}{p_3} = 10 \cdot \frac{16}{5} = 32.$$

Ainsi,

$$c_3^B = 120 + 32 + 25 = 177.$$

Ainsi,

$$\boxed{c^{B*} = \left(\frac{177}{2}, \frac{885}{8}, 177\right).}$$

Vérification des marchés.

Pour le bien 1,

$$\frac{63}{2} + \frac{177}{2} = \frac{240}{2} = 120.$$

Pour le bien 2,

$$\frac{315}{8} + \frac{885}{8} = \frac{1200}{8} = 150.$$

Pour le bien 3,

$$63 + 177 = 240.$$

Tous les marchés sont bien équilibrés.

6. Effet d'un transfert monétaire T de B vers A. On suppose qu'un transfert monétaire d'un montant T est mis en place au profit de A, au détriment de B.

Les nouveaux revenus sont donc

$$m'_A = m_A + T, \qquad m'_B = m_B - T.$$

Point clé. Les deux agents ont exactement les mêmes parts budgétaires :

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{6}.$$

Par conséquent, pour tout vecteur de prix, leurs demandes ont la forme :

$$c_1^i = \frac{1}{2}m_i, \qquad c_2^i = \frac{1}{3}\frac{m_i}{p_2}, \qquad c_3^i = \frac{1}{6}\frac{m_i}{p_3}.$$

La demande agrégée devient donc :

$$C'_1 = \frac{1}{2}m'_A + \frac{1}{2}m'_B = \frac{1}{2}(m'_A + m'_B),$$

$$C'_2 = \frac{1}{3}\frac{m'_A}{p_2} + \frac{1}{3}\frac{m'_B}{p_2} = \frac{1}{3}\frac{m'_A + m'_B}{p_2},$$

$$C'_3 = \frac{1}{6}\frac{m'_A}{p_3} + \frac{1}{6}\frac{m'_B}{p_3} = \frac{1}{6}\frac{m'_A + m'_B}{p_3}.$$

Or

$$m'_A + m'_B = (m_A + T) + (m_B - T) = m_A + m_B.$$

Le revenu total de l'économie est donc inchangé.

Il en résulte que

$$C_1' = C_1, \qquad C_2' = C_2, \qquad C_3' = C_3.$$

Conclusion. La demande agrégée est inchangée pour tout vecteur de prix. Comme la dotation agrégée est elle aussi inchangée, les prix d'équilibre ne sont pas modifiés.

Ainsi,

$$\boxed{p_2^* = \frac{8}{15}, \qquad p_3^* = \frac{1}{6}}$$

demeurent les prix d'équilibre après le transfert.

Interprétation économique. Le transfert modifie la répartition individuelle du revenu, mais non le revenu total de l'économie. Comme les deux agents ont exactement les mêmes parts budgétaires, seule la somme des revenus importe pour la demande agrégée. L'économie se comporte alors, du point de vue de la demande agrégée, comme si elle était gouvernée par un agent représentatif.

Réponse finale.

Contraintes budgétaires :

$$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A = 90p_2 + 90p_3,$$
$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 120 + 60p_2 + 150p_3.$$

Demandes de A :

$$c_1^A = 45p_2 + 45p_3, \quad c_2^A = 30 + 30\frac{p_3}{p_2}, \quad c_3^A = 15\frac{p_2}{p_3} + 15.$$

Demandes de B :

$$c_1^B = 60 + 30p_2 + 75p_3, \quad c_2^B = \frac{40}{p_2} + 20 + 50\frac{p_3}{p_2}, \quad c_3^B = \frac{20}{p_3} + 10\frac{p_2}{p_3} + 25.$$

Prix d'équilibre :

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \left(1, \frac{8}{15}, \frac{1}{6}\right).$$

Allocation d'équilibre :

$$c^{A*} = \left(\frac{63}{2}, \frac{315}{8}, 63\right),$$
$$c^{B*} = \left(\frac{177}{2}, \frac{885}{8}, 177\right).$$

Un transfert monétaire T de B vers A ne modifie pas les prix d'équilibre,

car les deux agents ont les mêmes parts budgétaires et la demande agrégée ne dépend alors que du revenu to

Corrigé de l'exercice 2

On considère une économie d'échanges à trois biens et deux agents, avec préférences

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A, \qquad U_B = \ln(c_1^B) + \ln(c_2^B) + 2\ln(c_3^B),$$

et dotations initiales

$$\omega^A = (0, 200, 100), \qquad \omega^B = (100, 0, 200).$$

Le bien 1 est le numéraire :

$$p_1 = 1, \qquad p_2 > 0, \qquad p_3 > 0.$$

1. Contraintes budgétaires des deux agents. Rappel de cours. Dans une économie d'échanges, la richesse de l'agent i est égale à la valeur de sa dotation initiale :

$$m_i = p \cdot \omega^i.$$

La contrainte budgétaire s'écrit donc

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i.$$

Comme les préférences sont ici strictement croissantes, la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum :

$$p \cdot c^i = p \cdot \omega^i.$$

Agent A**.** Sa dotation est

$$\omega^A = (0, 200, 100).$$

La valeur de cette dotation est

$$m_A = 1 \cdot 0 + p_2 \cdot 200 + p_3 \cdot 100.$$

Donc

$$m_A = 200p_2 + 100p_3.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A = 200p_2 + 100p_3.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A = 200p_2 + 100p_3.}$$

Agent B. Sa dotation est

$$\omega^B = (100, 0, 200).$$

La valeur de cette dotation est

$$m_B = 1 \cdot 100 + p_2 \cdot 0 + p_3 \cdot 200.$$

Donc

$$m_B = 100 + 200p_3.$$

Sa contrainte budgétaire est

$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 100 + 200p_3.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 100 + 200p_3.}$$

2. Demandes walrassiennes de l'agent A. L'agent A a pour utilité

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A.$$

Étape 1 : calcul des utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^A = 2c_1^A c_2^A c_3^A, \qquad \mathrm{Um}_2^A = (c_1^A)^2 c_3^A, \qquad \mathrm{Um}_3^A = (c_1^A)^2 c_2^A.$$

Étape 2 : conditions marginales d'optimalité. À l'optimum intérieur,

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2^A}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^A}{p_3}.$$

Comme $p_1 = 1$, cela revient à écrire

$$\mathrm{Um}_1^A = \frac{\mathrm{Um}_2^A}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^A}{p_3}.$$

Commençons par comparer les biens 1 et 2 :

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_2^A} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{p_2}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_2^A} = \frac{2c_1^A c_2^A c_3^A}{(c_1^A)^2 c_3^A} = 2\frac{c_2^A}{c_1^A}.$$

Donc

$$2\frac{c_2^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_2}.$$

Par produit en croix,

$$2p_2c_2^A = c_1^A.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A = 2p_2c_2^A.}$$

Comparons maintenant les biens 1 et 3 :

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_3^A} = \frac{p_1}{p_3} = \frac{1}{p_3}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_3^A} = \frac{2c_1^Ac_2^Ac_3^A}{(c_1^A)^2c_2^A} = 2\frac{c_3^A}{c_1^A}.$$

Donc

$$2\frac{c_3^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_3}.$$

Par produit en croix,

$$2p_3c_3^A = c_1^A.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A = 2p_3c_3^A.}$$

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire. De

$$c_1^A = 2p_2c_2^A \qquad \text{et} \qquad c_1^A = 2p_3c_3^A,$$

on tire

$$c_2^A = \frac{c_1^A}{2p_2}, \qquad c_3^A = \frac{c_1^A}{2p_3}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire de A :

$$c_1^A + p_2\left(\frac{c_1^A}{2p_2}\right) + p_3\left(\frac{c_1^A}{2p_3}\right) = 200p_2 + 100p_3.$$

Donc

$$c_1^A + \frac{1}{2}c_1^A + \frac{1}{2}c_1^A = 200p_2 + 100p_3.$$

Ainsi,

$$2c_1^A = 200p_2 + 100p_3.$$

On en déduit

$$c_1^A = 100p_2 + 50p_3.$$

Puis

$$c_2^A = \frac{c_1^A}{2p_2} = \frac{100p_2 + 50p_3}{2p_2} = 50 + 25\frac{p_3}{p_2},$$

et

$$c_3^A = \frac{c_1^A}{2p_3} = \frac{100p_2 + 50p_3}{2p_3} = 50\frac{p_2}{p_3} + 25.$$

Conclusion. Les demandes walrassiennes de l'agent A sont

$$\boxed{c_1^A = 100p_2 + 50p_3,}$$

$$\boxed{c_2^A = 50 + 25\frac{p_3}{p_2},}$$

$$\boxed{c_3^A = 50\frac{p_2}{p_3} + 25.}$$

Remarque. On retrouve bien les parts budgétaires de l'agent A :

$$\frac{2}{2+1+1} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{4}.$$

3. Demandes walrassiennes de l'agent B. L'agent B a pour utilité

$$U_B = \ln(c_1^B) + \ln(c_2^B) + 2\ln(c_3^B).$$

Étape 1 : calcul des utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^B = \frac{1}{c_1^B}, \qquad \mathrm{Um}_2^B = \frac{1}{c_2^B}, \qquad \mathrm{Um}_3^B = \frac{2}{c_3^B}.$$

Étape 2 : conditions marginales d'optimalité. À l'optimum intérieur,

$$\frac{\mathrm{Um}_1^B}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2^B}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^B}{p_3}.$$

Comme $p_1 = 1$,

$$\frac{1}{c_1^B} = \frac{1}{p_2 c_2^B} = \frac{2}{p_3 c_3^B}.$$

Comparons d'abord les biens 1 et 2 :

$$\frac{1}{c_1^B} = \frac{1}{p_2 c_2^B}.$$

On en déduit

$$c_1^B = p_2 c_2^B,$$

soit

$$\boxed{c_1^B = p_2 c_2^B.}$$

Comparons ensuite les biens 1 et 3 :

$$\frac{1}{c_1^B} = \frac{2}{p_3 c_3^B}.$$

Par produit en croix,

$$p_3 c_3^B = 2c_1^B.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B = \frac{1}{2} p_3 c_3^B.}$$

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire. Des relations précédentes, on tire

$$c_2^B = \frac{c_1^B}{p_2}, \qquad c_3^B = \frac{2c_1^B}{p_3}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire de B :

$$c_1^B + p_2 \left(\frac{c_1^B}{p_2} \right) + p_3 \left(\frac{2c_1^B}{p_3} \right) = 100 + 200p_3.$$

Donc

$$c_1^B + c_1^B + 2c_1^B = 100 + 200p_3.$$

Ainsi,

$$4c_1^B = 100 + 200p_3.$$

On en déduit

$$c_1^B = 25 + 50p_3.$$

Puis

$$c_2^B = \frac{c_1^B}{p_2} = \frac{25 + 50p_3}{p_2} = \frac{25}{p_2} + 50\frac{p_3}{p_2},$$

et

$$c_3^B = \frac{2c_1^B}{p_3} = \frac{50 + 100p_3}{p_3} = \frac{50}{p_3} + 100.$$

Conclusion. Les demandes walrassiennes de l'agent B sont

$$\boxed{c_1^B = 25 + 50p_3,}$$

$$\boxed{c_2^B = \frac{25}{p_2} + 50\frac{p_3}{p_2},}$$

$$\boxed{c_3^B = \frac{50}{p_3} + 100.}$$

Remarque importante. Les parts budgétaires de l'agent B sont

$$\frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{2},$$

ce qui diffère des parts budgétaires de l'agent A, égales à

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{4}.$$

Cette différence est au cœur de l'exercice.

4. Conditions d'équilibre général et détermination des prix d'équilibre. Étape 1 : dotations agrégées. Les ressources totales sont

$$\bar{\omega}_1 = 0 + 100 = 100, \qquad \bar{\omega}_2 = 200 + 0 = 200, \qquad \bar{\omega}_3 = 100 + 200 = 300.$$

Donc

$$\bar{\omega} = (100, 200, 300).$$

Étape 2 : conditions d'équilibre des marchés. À l'équilibre,

$$c_1^A + c_1^B = 100,$$

$$c_2^A + c_2^B = 200,$$

$$c_3^A + c_3^B = 300.$$

Rappel sur la loi de Walras. Comme il y a trois biens, une des trois équations de marché est redondante. Il suffit donc d'en résoudre deux.

Étape 3 : écrire les demandes agrégées.

Pour le bien 1,

$$c_1^A + c_1^B = (100p_2 + 50p_3) + (25 + 50p_3) = 100p_2 + 100p_3 + 25.$$

Pour le bien 2,

$$c_2^A + c_2^B = \left(50 + 25\frac{p_3}{p_2}\right) + \left(\frac{25}{p_2} + 50\frac{p_3}{p_2}\right).$$

Donc

$$c_2^A + c_2^B = 50 + \frac{25}{p_2} + 75\frac{p_3}{p_2}.$$

Étape 4 : résoudre les équilibres de marché.

Commençons par le marché du bien 1 :

$$100p_2 + 100p_3 + 25 = 100.$$

Donc

$$100p_2 + 100p_3 = 75.$$

En divisant par 100,

$$\boxed{p_2 + p_3 = \frac{3}{4}.}$$

Passons au marché du bien 2 :

$$50 + \frac{25}{p_2} + 75\frac{p_3}{p_2} = 200.$$

Donc

$$\frac{25}{p_2} + 75\frac{p_3}{p_2} = 150.$$

En multipliant par p_2,

$$25 + 75p_3 = 150p_2.$$

En divisant par 25,

$$\boxed{1 + 3p_3 = 6p_2.}$$

Nous devons donc résoudre le système

$$\begin{cases} p_2 + p_3 = \frac{3}{4}, \\ 1 + 3p_3 = 6p_2. \end{cases}$$

Remplaçons p_2 par $\frac{3}{4} - p_3$ dans la seconde équation :

$$1 + 3p_3 = 6\left(\frac{3}{4} - p_3\right).$$

Donc

$$1 + 3p_3 = \frac{9}{2} - 6p_3.$$

Ainsi,

$$9p_3 = \frac{7}{2}.$$

On en déduit

$$p_3^* = \frac{7}{18}.$$

Puis

$$p_2^* = \frac{3}{4} - \frac{7}{18}.$$

Mettons au même dénominateur :

$$\frac{3}{4} = \frac{27}{36}, \qquad \frac{7}{18} = \frac{14}{36}.$$

Donc
$$p_2^* = \frac{27}{36} - \frac{14}{36} = \frac{13}{36}.$$

Conclusion. Les prix d'équilibre sont
$$\boxed{(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \left(1, \frac{13}{36}, \frac{7}{18}\right).}$$

5. Allocation d'équilibre. Il suffit de remplacer (p_2, p_3) par $\left(\frac{13}{36}, \frac{7}{18}\right)$ dans les demandes individuelles.

Agent A.

Pour le bien 1,
$$c_1^A = 100p_2 + 50p_3 = 100 \cdot \frac{13}{36} + 50 \cdot \frac{7}{18}.$$
Calculons :
$$100 \cdot \frac{13}{36} = \frac{325}{9}, \qquad 50 \cdot \frac{7}{18} = \frac{175}{9}.$$
Donc
$$c_1^A = \frac{500}{9}.$$

Pour le bien 2,
$$c_2^A = 50 + 25\frac{p_3}{p_2} = 50 + 25 \cdot \frac{7/18}{13/36}.$$
Or
$$\frac{7/18}{13/36} = \frac{7}{18} \cdot \frac{36}{13} = \frac{14}{13}.$$
Donc
$$c_2^A = 50 + 25 \cdot \frac{14}{13} = 50 + \frac{350}{13} = \frac{650}{13} + \frac{350}{13} = \frac{1000}{13}.$$

Pour le bien 3,
$$c_3^A = 50\frac{p_2}{p_3} + 25 = 50 \cdot \frac{13/36}{7/18} + 25.$$
Or
$$\frac{13/36}{7/18} = \frac{13}{36} \cdot \frac{18}{7} = \frac{13}{14}.$$
Donc
$$c_3^A = 50 \cdot \frac{13}{14} + 25 = \frac{325}{7} + \frac{175}{7} = \frac{500}{7}.$$

Ainsi,
$$\boxed{c^{A*} = \left(\frac{500}{9}, \frac{1000}{13}, \frac{500}{7}\right).}$$

Agent B.

Pour le bien 1,

$$c_1^B = 25 + 50p_3 = 25 + 50 \cdot \frac{7}{18} = 25 + \frac{175}{9} = \frac{225}{9} + \frac{175}{9} = \frac{400}{9}.$$

Pour le bien 2,

$$c_2^B = \frac{25}{p_2} + 50\frac{p_3}{p_2}.$$

Or

$$\frac{25}{p_2} = 25 \cdot \frac{36}{13} = \frac{900}{13}, \qquad 50\frac{p_3}{p_2} = 50 \cdot \frac{14}{13} = \frac{700}{13}.$$

Donc

$$c_2^B = \frac{1600}{13}.$$

Pour le bien 3,

$$c_3^B = \frac{50}{p_3} + 100 = 50 \cdot \frac{18}{7} + 100 = \frac{900}{7} + \frac{700}{7} = \frac{1600}{7}.$$

Ainsi,

$$\boxed{c^{B*} = \left(\frac{400}{9}, \frac{1600}{13}, \frac{1600}{7}\right).}$$

Vérification des marchés.

Pour le bien 1,

$$\frac{500}{9} + \frac{400}{9} = \frac{900}{9} = 100.$$

Pour le bien 2,

$$\frac{1000}{13} + \frac{1600}{13} = \frac{2600}{13} = 200.$$

Pour le bien 3,

$$\frac{500}{7} + \frac{1600}{7} = \frac{2100}{7} = 300.$$

Tous les marchés sont bien équilibrés.

6. Effet d'un transfert monétaire T de B vers A. On met en place un transfert monétaire de montant T au profit de A, au détriment de B.

Les nouvelles contraintes budgétaires deviennent :

$$c_1^A + p_2c_2^A + p_3c_3^A = 200p_2 + 100p_3 + T,$$

$$c_1^B + p_2c_2^B + p_3c_3^B = 100 + 200p_3 - T.$$

Étape 1 : nouvelles demandes individuelles.

Comme les préférences ne changent pas, les parts budgétaires ne changent pas.

Pour l'agent A, les parts budgétaires sont

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{4}.$$

Donc

$$c_1^A = 100p_2 + 50p_3 + \frac{T}{2},$$

$$c_2^A = 50 + 25\frac{p_3}{p_2} + \frac{T}{4p_2},$$

$$c_3^A = 50\frac{p_2}{p_3} + 25 + \frac{T}{4p_3}.$$

Pour l'agent B, les parts budgétaires sont

$$\frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{2}.$$

Donc

$$c_1^B = 25 + 50p_3 - \frac{T}{4},$$

$$c_2^B = \frac{25}{p_2} + 50\frac{p_3}{p_2} - \frac{T}{4p_2},$$

$$c_3^B = \frac{50}{p_3} + 100 - \frac{T}{2p_3}.$$

Étape 2 : nouvelles demandes agrégées.

Pour le bien 1,

$$c_1^A + c_1^B = 100p_2 + 50p_3 + \frac{T}{2} + 25 + 50p_3 - \frac{T}{4}.$$

Donc

$$c_1^A + c_1^B = 100p_2 + 100p_3 + 25 + \frac{T}{4}.$$

Pour le bien 2,

$$c_2^A + c_2^B = \left(50 + 25\frac{p_3}{p_2} + \frac{T}{4p_2}\right) + \left(\frac{25}{p_2} + 50\frac{p_3}{p_2} - \frac{T}{4p_2}\right).$$

Les termes en T se simplifient, donc

$$c_2^A + c_2^B = 50 + \frac{25}{p_2} + 75\frac{p_3}{p_2}.$$

Pour le bien 3,

$$c_3^A + c_3^B = \left(50\frac{p_2}{p_3} + 25 + \frac{T}{4p_3}\right) + \left(\frac{50}{p_3} + 100 - \frac{T}{2p_3}\right).$$

Donc

$$c_3^A + c_3^B = 50\frac{p_2}{p_3} + 125 + \frac{50}{p_3} - \frac{T}{4p_3}.$$

Étape 3 : nouvelles conditions d'équilibre.

Le marché du bien 1 donne :

$$100p_2 + 100p_3 + 25 + \frac{T}{4} = 100.$$

Donc

$$100p_2 + 100p_3 = 75 - \frac{T}{4}.$$

En divisant par 100,

$$\boxed{p_2 + p_3 = \frac{3}{4} - \frac{T}{400}.}$$

Le marché du bien 2 donne :

$$50 + \frac{25}{p_2} + 75\frac{p_3}{p_2} = 200.$$

C'est exactement la même équation qu'avant :

$$\frac{25}{p_2} + 75\frac{p_3}{p_2} = 150.$$

En multipliant par p_2,

$$25 + 75p_3 = 150p_2.$$

En divisant par 25,

$$\boxed{1 + 3p_3 = 6p_2.}$$

Nous devons donc résoudre le système

$$\begin{cases} p_2 + p_3 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{T}{400}, \\ 1 + 3p_3 = 6p_2. \end{cases}$$

Étape 4 : résolution.

De la première équation, on tire

$$p_2 = \frac{3}{4} - \frac{T}{400} - p_3.$$

On remplace dans la seconde :

$$1 + 3p_3 = 6\left(\frac{3}{4} - \frac{T}{400} - p_3\right).$$

Donc

$$1 + 3p_3 = \frac{9}{2} - \frac{3T}{200} - 6p_3.$$

Ainsi,

$$9p_3 = \frac{7}{2} - \frac{3T}{200}.$$

On en déduit

$$p_3^* = \frac{7}{18} - \frac{T}{600}.$$

Puis

$$p_2^* = \frac{3}{4} - \frac{T}{400} - \left(\frac{7}{18} - \frac{T}{600}\right).$$

Mettons les constantes ensemble :

$$\frac{3}{4} - \frac{7}{18} = \frac{13}{36}.$$

Et les termes en T :

$$-\frac{T}{400} + \frac{T}{600} = -\frac{T}{1200}.$$

Donc

$$p_2^* = \frac{13}{36} - \frac{T}{1200}.$$

Conclusion. Les nouveaux prix d'équilibre sont

$$\boxed{p_2^*(T) = \frac{13}{36} - \frac{T}{1200}, \qquad p_3^*(T) = \frac{7}{18} - \frac{T}{600}.}$$

Ces formules sont valables pour les valeurs de T assurant la positivité des prix, c'est-à-dire pour

$$p_2^*(T) > 0 \qquad \text{et} \qquad p_3^*(T) > 0.$$

La contrainte la plus restrictive est

$$p_3^*(T) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T < \frac{700}{3}.$$

Commentaire économique.

Le transfert de revenu au profit de A modifie la demande agrégée parce que A et B n'ont pas les mêmes parts budgétaires.

En effet :

— l'agent A consacre la moitié de son revenu au bien 1, alors que B n'y consacre qu'un quart ;
— inversement, B consacre la moitié de son revenu au bien 3, alors que A n'y consacre qu'un quart ;
— les deux agents consacrent en revanche la même part de leur revenu au bien 2, à savoir un quart.

Par conséquent, lorsque l'on transfère du revenu de B vers A :

— la demande agrégée du bien 1 augmente ;
— la demande agrégée du bien 3 diminue ;
— la demande agrégée du bien 2 reste inchangée.

Comme le bien 1 est le numéraire, l'augmentation de la demande relative du bien 1 se traduit ici par une baisse de p_2 et de p_3, c'est-à-dire des prix des biens 2 et 3 relativement au bien 1.

7. Différence avec le cas de parts budgétaires identiques. Dans l'exercice précédent, ou dans tout exercice où les deux agents ont exactement les mêmes parts budgétaires, la demande agrégée s'écrit sous la forme

$$C_\ell(p) = \theta_\ell \frac{m_A + m_B}{p_\ell}.$$

Elle dépend donc seulement du **revenu total** de l'économie, et non de sa répartition entre les agents.

Dans un tel cas, un transfert de revenu d'un agent vers l'autre, à revenu total inchangé, ne modifie pas la demande agrégée et ne change donc pas les prix d'équilibre.

Ici, au contraire, les parts budgétaires diffèrent entre A et B. La demande agrégée dépend donc de la **répartition** du revenu entre les deux agents. Un transfert de revenu modifie alors les prix d'équilibre.

Conclusion conceptuelle. La propriété d'invariance des prix à une redistribution n'est pas générale. Elle ne vaut que dans des cas particuliers, notamment lorsque les agents ont les mêmes structures de demande en parts budgétaires.

Réponse finale.

Contraintes budgétaires : $$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A = 200p_2 + 100p_3,$$ $$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 100 + 200p_3.$$ Demandes de A : $$c_1^A = 100p_2 + 50p_3, \quad c_2^A = 50 + 25\frac{p_3}{p_2}, \quad c_3^A = 50\frac{p_2}{p_3} + 25.$$ Demandes de B : $$c_1^B = 25 + 50p_3, \quad c_2^B = \frac{25}{p_2} + 50\frac{p_3}{p_2}, \quad c_3^B = \frac{50}{p_3} + 100.$$ Prix d'équilibre : $$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \left(1, \frac{13}{36}, \frac{7}{18}\right).$$ Allocation d'équilibre : $$c^{A*} = \left(\frac{500}{9}, \frac{1000}{13}, \frac{500}{7}\right),$$ $$c^{B*} = \left(\frac{400}{9}, \frac{1600}{13}, \frac{1600}{7}\right).$$ Après un transfert T de B vers A, les nouveaux prix d'équilibre sont $$p_2^*(T) = \frac{13}{36} - \frac{T}{1200}, \qquad p_3^*(T) = \frac{7}{18} - \frac{T}{600},$$ pour T suffisamment petit pour garantir la positivité des prix. Les prix changent parce que A et B n'ont pas les mêmes parts budgétaires.

Corrigé de l'exercice 3

On considère une économie d'échanges à quatre biens et deux agents, avec préférences

$$U_A = (c_1^A)^4 (c_2^A)^2 c_3^A c_4^A, \qquad U_B = 4\ln(c_1^B) + 2\ln(c_2^B) + \ln(c_3^B) + \ln(c_4^B),$$

et dotations initiales

$$\omega^A = (0, 80, 40, 120), \qquad \omega^B = (120, 40, 80, 120).$$

Le bien 1 est le numéraire :

$$p_1 = 1, \qquad p_2 > 0, \qquad p_3 > 0, \qquad p_4 > 0.$$

1. Contraintes budgétaires des deux agents. Rappel de cours. Dans une économie d'échanges, la richesse de l'agent i est la valeur marchande de sa dotation initiale :

$$m_i = p \cdot \omega^i.$$

La contrainte budgétaire s'écrit donc

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i.$$

Comme les préférences sont ici strictement croissantes, cette contrainte est saturée à l'optimum :

$$p \cdot c^i = p \cdot \omega^i.$$

Agent A. Sa dotation est

$$\omega^A = (0, 80, 40, 120).$$

La valeur de cette dotation est

$$m_A = 1 \cdot 0 + p_2 \cdot 80 + p_3 \cdot 40 + p_4 \cdot 120.$$

Donc

$$m_A = 80p_2 + 40p_3 + 120p_4.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A + p_4 c_4^A = 80p_2 + 40p_3 + 120p_4.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A + p_4 c_4^A = 80p_2 + 40p_3 + 120p_4.}$$

Agent B. Sa dotation est

$$\omega^B = (120, 40, 80, 120).$$

La valeur de cette dotation est

$$m_B = 1 \cdot 120 + p_2 \cdot 40 + p_3 \cdot 80 + p_4 \cdot 120.$$

Donc

$$m_B = 120 + 40p_2 + 80p_3 + 120p_4.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B + p_4 c_4^B = 120 + 40p_2 + 80p_3 + 120p_4.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B + p_4 c_4^B = 120 + 40p_2 + 80p_3 + 120p_4.}$$

2. Demandes walrassiennes de l'agent A. L'agent A a pour utilité

$$U_A = (c_1^A)^4 (c_2^A)^2 c_3^A c_4^A.$$

Étape 1 : calcul des utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^A = 4(c_1^A)^3 (c_2^A)^2 c_3^A c_4^A,$$

$$\mathrm{Um}_2^A = 2(c_1^A)^4 c_2^A c_3^A c_4^A,$$

$$\mathrm{Um}_3^A = (c_1^A)^4 (c_2^A)^2 c_4^A,$$

$$\mathrm{Um}_4^A = (c_1^A)^4 (c_2^A)^2 c_3^A.$$

Étape 2 : conditions marginales d'optimalité. À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2^A}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^A}{p_3} = \frac{\mathrm{Um}_4^A}{p_4}.$$

Comme $p_1 = 1$, cela donne

$$\mathrm{Um}_1^A = \frac{\mathrm{Um}_2^A}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^A}{p_3} = \frac{\mathrm{Um}_4^A}{p_4}.$$

Commençons par comparer les biens 1 et 2 :

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_2^A} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{p_2}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_2^A} = \frac{4(c_1^A)^3 (c_2^A)^2 c_3^A c_4^A}{2(c_1^A)^4 c_2^A c_3^A c_4^A} = 2\frac{c_2^A}{c_1^A}.$$

Donc

$$2\frac{c_2^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_2}.$$

Par produit en croix,

$$2p_2 c_2^A = c_1^A.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A = 2p_2 c_2^A.}$$

Comparons ensuite les biens 1 et 3 :

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_3^A} = \frac{1}{p_3}.$$

Or
$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_3^A} = \frac{4(c_1^A)^3(c_2^A)^2c_3^Ac_4^A}{(c_1^A)^4(c_2^A)^2c_4^A} = 4\frac{c_3^A}{c_1^A}.$$
Donc
$$4\frac{c_3^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_3}.$$
Par produit en croix,
$$4p_3c_3^A = c_1^A.$$
Ainsi,
$$\boxed{c_1^A = 4p_3c_3^A.}$$

Comparons enfin les biens 1 et 4 :
$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_4^A} = \frac{1}{p_4}.$$
Or
$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_4^A} = \frac{4(c_1^A)^3(c_2^A)^2c_3^Ac_4^A}{(c_1^A)^4(c_2^A)^2c_3^A} = 4\frac{c_4^A}{c_1^A}.$$
Donc
$$4\frac{c_4^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_4}.$$
Par produit en croix,
$$4p_4c_4^A = c_1^A.$$
Ainsi,
$$\boxed{c_1^A = 4p_4c_4^A.}$$

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire. Des relations précédentes, on tire
$$c_2^A = \frac{c_1^A}{2p_2}, \qquad c_3^A = \frac{c_1^A}{4p_3}, \qquad c_4^A = \frac{c_1^A}{4p_4}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire de A :
$$c_1^A + p_2\left(\frac{c_1^A}{2p_2}\right) + p_3\left(\frac{c_1^A}{4p_3}\right) + p_4\left(\frac{c_1^A}{4p_4}\right) = 80p_2 + 40p_3 + 120p_4.$$
Donc
$$c_1^A + \frac{1}{2}c_1^A + \frac{1}{4}c_1^A + \frac{1}{4}c_1^A = 80p_2 + 40p_3 + 120p_4.$$
Ainsi,
$$2c_1^A = 80p_2 + 40p_3 + 120p_4.$$
On en déduit
$$c_1^A = 40p_2 + 20p_3 + 60p_4.$$

Puis

$$c_2^A = \frac{c_1^A}{2p_2} = \frac{40p_2 + 20p_3 + 60p_4}{2p_2} = 20 + 10\frac{p_3}{p_2} + 30\frac{p_4}{p_2},$$

$$c_3^A = \frac{c_1^A}{4p_3} = \frac{40p_2 + 20p_3 + 60p_4}{4p_3} = 10\frac{p_2}{p_3} + 5 + 15\frac{p_4}{p_3},$$

et

$$c_4^A = \frac{c_1^A}{4p_4} = \frac{40p_2 + 20p_3 + 60p_4}{4p_4} = 10\frac{p_2}{p_4} + 5\frac{p_3}{p_4} + 15.$$

Conclusion. Les demandes walrassiennes de l'agent A sont

$$\boxed{c_1^A = 40p_2 + 20p_3 + 60p_4,}$$

$$\boxed{c_2^A = 20 + 10\frac{p_3}{p_2} + 30\frac{p_4}{p_2},}$$

$$\boxed{c_3^A = 10\frac{p_2}{p_3} + 5 + 15\frac{p_4}{p_3},}$$

$$\boxed{c_4^A = 10\frac{p_2}{p_4} + 5\frac{p_3}{p_4} + 15.}$$

Remarque. On retrouve bien les parts budgétaires de l'agent A :

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{8}, \qquad \frac{1}{8}.$$

3. Demandes walrassiennes de l'agent B. L'agent B a pour utilité

$$U_B = 4\ln(c_1^B) + 2\ln(c_2^B) + \ln(c_3^B) + \ln(c_4^B).$$

Étape 1 : calcul des utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^B = \frac{4}{c_1^B}, \qquad \mathrm{Um}_2^B = \frac{2}{c_2^B}, \qquad \mathrm{Um}_3^B = \frac{1}{c_3^B}, \qquad \mathrm{Um}_4^B = \frac{1}{c_4^B}.$$

Étape 2 : conditions marginales d'optimalité. À l'optimum intérieur,

$$\frac{\mathrm{Um}_1^B}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2^B}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^B}{p_3} = \frac{\mathrm{Um}_4^B}{p_4}.$$

Comme $p_1 = 1$, cela donne

$$\frac{4}{c_1^B} = \frac{2}{p_2 c_2^B} = \frac{1}{p_3 c_3^B} = \frac{1}{p_4 c_4^B}.$$

Comparons d'abord les biens 1 et 2 :

$$\frac{4}{c_1^B} = \frac{2}{p_2 c_2^B}.$$

Par produit en croix,

$$4p_2c_2^B = 2c_1^B.$$

Donc

$$\boxed{c_1^B = 2p_2c_2^B.}$$

Comparons ensuite les biens 1 et 3 :

$$\frac{4}{c_1^B} = \frac{1}{p_3c_3^B}.$$

Par produit en croix,

$$4p_3c_3^B = c_1^B.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B = 4p_3c_3^B.}$$

Comparons enfin les biens 1 et 4 :

$$\frac{4}{c_1^B} = \frac{1}{p_4c_4^B}.$$

Par produit en croix,

$$4p_4c_4^B = c_1^B.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B = 4p_4c_4^B.}$$

On retrouve donc exactement les mêmes rapports de consommation que pour l'agent A.

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire. Des relations précédentes, on tire

$$c_2^B = \frac{c_1^B}{2p_2}, \qquad c_3^B = \frac{c_1^B}{4p_3}, \qquad c_4^B = \frac{c_1^B}{4p_4}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire de B :

$$c_1^B + p_2\left(\frac{c_1^B}{2p_2}\right) + p_3\left(\frac{c_1^B}{4p_3}\right) + p_4\left(\frac{c_1^B}{4p_4}\right) = 120 + 40p_2 + 80p_3 + 120p_4.$$

Donc

$$c_1^B + \frac{1}{2}c_1^B + \frac{1}{4}c_1^B + \frac{1}{4}c_1^B = 120 + 40p_2 + 80p_3 + 120p_4.$$

Ainsi,

$$2c_1^B = 120 + 40p_2 + 80p_3 + 120p_4.$$

On en déduit

$$c_1^B = 60 + 20p_2 + 40p_3 + 60p_4.$$

Puis

$$c_2^B = \frac{c_1^B}{2p_2} = \frac{60 + 20p_2 + 40p_3 + 60p_4}{2p_2} = \frac{30}{p_2} + 10 + 20\frac{p_3}{p_2} + 30\frac{p_4}{p_2},$$

$$c_3^B = \frac{c_1^B}{4p_3} = \frac{60 + 20p_2 + 40p_3 + 60p_4}{4p_3} = \frac{15}{p_3} + 5\frac{p_2}{p_3} + 10 + 15\frac{p_4}{p_3},$$

et

$$c_4^B = \frac{c_1^B}{4p_4} = \frac{60 + 20p_2 + 40p_3 + 60p_4}{4p_4} = \frac{15}{p_4} + 5\frac{p_2}{p_4} + 10\frac{p_3}{p_4} + 15.$$

Conclusion. Les demandes walrassiennes de l'agent B sont

$$\boxed{c_1^B = 60 + 20p_2 + 40p_3 + 60p_4,}$$

$$\boxed{c_2^B = \frac{30}{p_2} + 10 + 20\frac{p_3}{p_2} + 30\frac{p_4}{p_2},}$$

$$\boxed{c_3^B = \frac{15}{p_3} + 5\frac{p_2}{p_3} + 10 + 15\frac{p_4}{p_3},}$$

$$\boxed{c_4^B = \frac{15}{p_4} + 5\frac{p_2}{p_4} + 10\frac{p_3}{p_4} + 15.}$$

Remarque essentielle. Les deux agents ont exactement les mêmes parts budgétaires :

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{8}, \qquad \frac{1}{8}.$$

C'est cette propriété qui donne à l'agrégation une forme particulièrement simple.

4. Forme des demandes agrégées et interprétation. Étape 1 : valeur de la dotation agrégée. La dotation totale de l'économie est

$$\bar{\omega} = \omega^A + \omega^B = (120, 120, 120, 240).$$

Sa valeur, au vecteur de prix p, est

$$M(p) = p \cdot \bar{\omega} = 120 + 120p_2 + 120p_3 + 240p_4.$$

Étape 2 : structure des demandes individuelles. Comme les deux agents ont les mêmes parts budgétaires, chacun consacre :

$$\frac{1}{2} \text{ de son revenu au bien 1,} \qquad \frac{1}{4} \text{ au bien 2,} \qquad \frac{1}{8} \text{ au bien 3,} \qquad \frac{1}{8} \text{ au bien 4.}$$

Ainsi, pour chaque agent i,

$$c_1^i = \frac{1}{2}m_i, \qquad c_2^i = \frac{1}{4}\frac{m_i}{p_2}, \qquad c_3^i = \frac{1}{8}\frac{m_i}{p_3}, \qquad c_4^i = \frac{1}{8}\frac{m_i}{p_4}.$$

En additionnant sur $i = A, B$, on obtient :

$$C_1(p) = \frac{1}{2}(m_A + m_B) = \frac{1}{2}M(p),$$

$$C_2(p) = \frac{1}{4}\frac{M(p)}{p_2},$$

$$C_3(p) = \frac{1}{8}\frac{M(p)}{p_3},$$

$$C_4(p) = \frac{1}{8}\frac{M(p)}{p_4}.$$

Conclusion. Les demandes agrégées s'écrivent bien

$$\boxed{C_\ell(p) = \theta_\ell \frac{M(p)}{p_\ell}}$$

avec

$$\boxed{\theta_1 = \frac{1}{2}, \qquad \theta_2 = \frac{1}{4}, \qquad \theta_3 = \frac{1}{8}, \qquad \theta_4 = \frac{1}{8}.}$$

Interprétation économique. La demande agrégée dépend seulement :

— des prix ;
— de la valeur de la dotation agrégée ;
— et non de la répartition des dotations entre les agents.

L'économie se comporte donc ici, du point de vue de la demande agrégée, comme si elle était gouvernée par un agent représentatif ayant les mêmes parts budgétaires.

5. Conditions d'équilibre général et détermination des prix d'équilibre. Étape 1 : équilibres de marché. La dotation agrégée est

$$\bar{\omega} = (120, 120, 120, 240).$$

Les conditions d'équilibre sont donc :

$$C_1(p) = 120, \qquad C_2(p) = 120, \qquad C_3(p) = 120, \qquad C_4(p) = 240.$$

Rappel sur la loi de Walras. Comme il y a quatre biens, une des quatre équations de marché est redondante. Il suffit donc d'en résoudre trois.

Étape 2 : utiliser le marché du bien 1**.** On a

$$C_1(p) = \frac{1}{2}M(p).$$

L'équilibre sur le bien 1 donne donc

$$\frac{1}{2}M(p) = 120.$$

Ainsi,

$$\boxed{M(p) = 240.}$$

Étape 3 : utiliser ensuite les autres marchés.

Pour le bien 2,

$$C_2(p) = \frac{1}{4}\frac{M(p)}{p_2} = 120.$$

Comme $M(p) = 240$, on obtient

$$\frac{1}{4}\frac{240}{p_2} = 120.$$

Donc

$$\frac{60}{p_2} = 120.$$

Ainsi,

$$\boxed{p_2^* = \frac{1}{2}.}$$

Pour le bien 3,

$$C_3(p) = \frac{1}{8}\frac{M(p)}{p_3} = 120.$$

Comme $M(p) = 240$, on obtient

$$\frac{1}{8}\frac{240}{p_3} = 120.$$

Donc

$$\frac{30}{p_3} = 120.$$

Ainsi,

$$\boxed{p_3^* = \frac{1}{4}.}$$

Pour le bien 4,

$$C_4(p) = \frac{1}{8}\frac{M(p)}{p_4} = 240.$$

Comme $M(p) = 240$, on obtient

$$\frac{1}{8}\frac{240}{p_4} = 240.$$

Donc

$$\frac{30}{p_4} = 240.$$

Ainsi,

$$\boxed{p_4^* = \frac{1}{8}.}$$

Conclusion. Les prix d'équilibre sont

$$\boxed{(p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right).}$$

6. Allocation d'équilibre. Il suffit de remplacer (p_2, p_3, p_4) par $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ dans les demandes individuelles.

Agent A**.** Sa richesse à l'équilibre vaut

$$m_A = 80 \cdot \frac{1}{2} + 40 \cdot \frac{1}{4} + 120 \cdot \frac{1}{8}.$$

Calculons :

$$80 \cdot \frac{1}{2} = 40, \qquad 40 \cdot \frac{1}{4} = 10, \qquad 120 \cdot \frac{1}{8} = 15.$$

Donc

$$m_A = 65.$$

Comme ses parts budgétaires sont

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{8}, \qquad \frac{1}{8},$$

on obtient

$$\begin{aligned} c_1^A &= \frac{1}{2} m_A = \frac{65}{2}, \\ c_2^A &= \frac{1}{4} \frac{m_A}{p_2} = \frac{1}{4} \frac{65}{1/2} = \frac{65}{2}, \\ c_3^A &= \frac{1}{8} \frac{m_A}{p_3} = \frac{1}{8} \frac{65}{1/4} = \frac{65}{2}, \\ c_4^A &= \frac{1}{8} \frac{m_A}{p_4} = \frac{1}{8} \frac{65}{1/8} = 65. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{c^{A*} = \left(\frac{65}{2}, \frac{65}{2}, \frac{65}{2}, 65\right).}$$

Agent B**.** Sa richesse à l'équilibre vaut

$$m_B = 120 + 40 \cdot \frac{1}{2} + 80 \cdot \frac{1}{4} + 120 \cdot \frac{1}{8}.$$

Calculons :

$$40 \cdot \frac{1}{2} = 20, \qquad 80 \cdot \frac{1}{4} = 20, \qquad 120 \cdot \frac{1}{8} = 15.$$

Donc

$$m_B = 120 + 20 + 20 + 15 = 175.$$

On en déduit

$$c_1^B = \frac{1}{2}m_B = \frac{175}{2},$$

$$c_2^B = \frac{1}{4}\frac{175}{1/2} = \frac{175}{2},$$

$$c_3^B = \frac{1}{8}\frac{175}{1/4} = \frac{175}{2},$$

$$c_4^B = \frac{1}{8}\frac{175}{1/8} = 175.$$

Ainsi,

$$\boxed{c^{B*} = \left(\frac{175}{2}, \frac{175}{2}, \frac{175}{2}, 175\right).}$$

Vérification des marchés. Pour les biens 1, 2 et 3,

$$\frac{65}{2} + \frac{175}{2} = \frac{240}{2} = 120.$$

Pour le bien 4,

$$65 + 175 = 240.$$

Tous les marchés sont bien équilibrés.

7. Nouvelle dotation agrégée $\bar{\omega}' = (120, 120, 120, 480)$ et nouveaux prix d'équilibre. On considère maintenant une nouvelle économie dont la dotation agrégée est

$$\bar{\omega}' = (120, 120, 120, 480).$$

Autrement dit, les quantités totales des biens 1, 2 et 3 sont inchangées, tandis que la quantité totale du bien 4 a doublé.

Point clé. Les préférences n'ont pas changé et les deux agents conservent les mêmes parts budgétaires :

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{8}, \qquad \frac{1}{8}.$$

La demande agrégée garde donc la forme

$$C_1(p) = \frac{1}{2}M(p), \qquad C_2(p) = \frac{1}{4}\frac{M(p)}{p_2}, \qquad C_3(p) = \frac{1}{8}\frac{M(p)}{p_3}, \qquad C_4(p) = \frac{1}{8}\frac{M(p)}{p_4},$$

où

$$M(p) = p \cdot \bar{\omega}'.$$

Étape 1 : utiliser le marché du bien 1. Le marché du bien 1 reste

$$C_1(p) = 120.$$

Donc

$$\frac{1}{2}M(p) = 120,$$

ce qui implique encore

$$\boxed{M(p) = 240.}$$

Étape 2 : déterminer les nouveaux prix.

Pour le bien 2,

$$\frac{1}{4}\frac{240}{p_2'} = 120 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{60}{p_2'} = 120 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{p_2' = \frac{1}{2}.}$$

Pour le bien 3,

$$\frac{1}{8}\frac{240}{p_3'} = 120 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{30}{p_3'} = 120 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{p_3' = \frac{1}{4}.}$$

Pour le bien 4, l'offre totale est désormais 480. On doit donc avoir

$$\frac{1}{8}\frac{240}{p_4'} = 480.$$

Donc

$$\frac{30}{p_4'} = 480,$$

d'où

$$\boxed{p_4' = \frac{1}{16}.}$$

Conclusion. Les nouveaux prix d'équilibre sont

$$\boxed{(p_1', p_2', p_3', p_4') = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right).}$$

Commentaire économique.

Les quantités agrégées des biens 1, 2 et 3 n'ont pas changé. Leurs prix d'équilibre relatifs au numéraire restent donc inchangés :

$$p_2' = \frac{1}{2}, \qquad p_3' = \frac{1}{4}.$$

En revanche, l'offre agrégée du bien 4 a doublé, passant de 240 à 480. Comme la part budgétaire agrégée consacrée au bien 4 reste égale à

$$\frac{1}{8},$$

la dépense totale consacrée à ce bien reste

$$\frac{1}{8}M(p) = \frac{1}{8} \times 240 = 30.$$

Pour que cette dépense inchangée permette d'absorber une quantité deux fois plus grande, le prix du bien 4 doit être divisé par deux :

$$\frac{1}{8} \longrightarrow \frac{1}{16}.$$

Interprétation. Le bien 4 devient relativement plus abondant dans l'économie. Son prix relatif d'équilibre diminue donc.

Réponse finale.

Contraintes budgétaires :

$$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A + p_4 c_4^A = 80p_2 + 40p_3 + 120p_4,$$
$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B + p_4 c_4^B = 120 + 40p_2 + 80p_3 + 120p_4.$$

Demandes de A :

$$c_1^A = 40p_2 + 20p_3 + 60p_4,$$
$$c_2^A = 20 + 10\frac{p_3}{p_2} + 30\frac{p_4}{p_2},$$
$$c_3^A = 10\frac{p_2}{p_3} + 5 + 15\frac{p_4}{p_3},$$
$$c_4^A = 10\frac{p_2}{p_4} + 5\frac{p_3}{p_4} + 15.$$

Demandes de B :

$$c_1^B = 60 + 20p_2 + 40p_3 + 60p_4,$$
$$c_2^B = \frac{30}{p_2} + 10 + 20\frac{p_3}{p_2} + 30\frac{p_4}{p_2},$$
$$c_3^B = \frac{15}{p_3} + 5\frac{p_2}{p_3} + 10 + 15\frac{p_4}{p_3},$$
$$c_4^B = \frac{15}{p_4} + 5\frac{p_2}{p_4} + 10\frac{p_3}{p_4} + 15.$$

Demandes agrégées :

$$C_1(p) = \frac{1}{2}M(p), \quad C_2(p) = \frac{1}{4}\frac{M(p)}{p_2}, \quad C_3(p) = \frac{1}{8}\frac{M(p)}{p_3}, \quad C_4(p) = \frac{1}{8}\frac{M(p)}{p_4},$$

avec $M(p) = 120 + 120p_2 + 120p_3 + 240p_4$.

Prix d'équilibre initiaux :

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right).$$

Allocation d'équilibre :

$$c^{A*} = \left(\frac{65}{2}, \frac{65}{2}, \frac{65}{2}, 65\right),$$
$$c^{B*} = \left(\frac{175}{2}, \frac{175}{2}, \frac{175}{2}, 175\right).$$

Avec la nouvelle dotation agrégée $\bar{\omega}' = (120, 120, 120, 480)$,

$$(p_1', p_2', p_3', p_4') = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right).$$

Le seul prix qui change est celui du bien 4, qui est divisé par deux,

car l'offre agrégée de ce bien double alors que la part budgétaire qui lui est consacrée reste inchangée.

Corrigé de l'exercice 4

On considère une économie d'échanges à quatre biens et deux agents, avec préférences

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A (c_4^A)^2, \qquad U_B = \ln(c_1^B) + 2\ln(c_2^B) + \ln(c_3^B) + 2\ln(c_4^B),$$

et dotations initiales

$$\omega^A = (0, 60, 0, 0), \qquad \omega^B = (60, 30, 100, 400).$$

Le bien 1 est le numéraire :

$$p_1 = 1, \qquad p_2 > 0, \qquad p_3 > 0, \qquad p_4 > 0.$$

1. Contraintes budgétaires des deux agents. **Rappel de cours.** Dans une économie d'échanges, la richesse de l'agent i est égale à la valeur de sa dotation initiale :

$$m_i = p \cdot \omega^i.$$

La contrainte budgétaire s'écrit donc

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i.$$

Comme les préférences sont ici strictement croissantes, la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum :

$$p \cdot c^i = p \cdot \omega^i.$$

Agent A. Sa dotation est

$$\omega^A = (0, 60, 0, 0).$$

La valeur de cette dotation est

$$m_A = 1 \cdot 0 + p_2 \cdot 60 + p_3 \cdot 0 + p_4 \cdot 0.$$

Donc

$$m_A = 60p_2.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A + p_4 c_4^A = 60p_2.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A + p_4 c_4^A = 60p_2.}$$

Agent B. Sa dotation est

$$\omega^B = (60, 30, 100, 400).$$

La valeur de cette dotation est

$$m_B = 1 \cdot 60 + p_2 \cdot 30 + p_3 \cdot 100 + p_4 \cdot 400.$$

Donc

$$m_B = 60 + 30p_2 + 100p_3 + 400p_4.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B + p_4 c_4^B = 60 + 30p_2 + 100p_3 + 400p_4.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B + p_4 c_4^B = 60 + 30p_2 + 100p_3 + 400p_4.}$$

2. Demandes walrassiennes de l'agent A. L'agent A a pour utilité

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A (c_4^A)^2.$$

Étape 1 : calcul des utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^A = 2c_1^A c_2^A c_3^A (c_4^A)^2,$$

$$\mathrm{Um}_2^A = (c_1^A)^2 c_3^A (c_4^A)^2,$$

$$\mathrm{Um}_3^A = (c_1^A)^2 c_2^A (c_4^A)^2,$$

$$\mathrm{Um}_4^A = 2(c_1^A)^2 c_2^A c_3^A c_4^A.$$

Étape 2 : conditions marginales d'optimalité. À l'optimum intérieur,

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2^A}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^A}{p_3} = \frac{\mathrm{Um}_4^A}{p_4}.$$

Comme $p_1 = 1$, cela devient

$$\mathrm{Um}_1^A = \frac{\mathrm{Um}_2^A}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^A}{p_3} = \frac{\mathrm{Um}_4^A}{p_4}.$$

Comparons d'abord les biens 1 et 2 :

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_2^A} = \frac{1}{p_2}.$$

Or
$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_2^A} = \frac{2c_1^A c_2^A c_3^A (c_4^A)^2}{(c_1^A)^2 c_3^A (c_4^A)^2} = 2\frac{c_2^A}{c_1^A}.$$
Donc
$$2\frac{c_2^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_2}.$$
Par produit en croix,
$$2p_2c_2^A = c_1^A.$$
Ainsi,
$$\boxed{c_1^A = 2p_2c_2^A.}$$

Comparons maintenant les biens 1 et 3 :
$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_3^A} = \frac{1}{p_3}.$$
Or
$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_3^A} = \frac{2c_1^A c_2^A c_3^A (c_4^A)^2}{(c_1^A)^2 c_2^A (c_4^A)^2} = 2\frac{c_3^A}{c_1^A}.$$
Donc
$$2\frac{c_3^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_3}.$$
Par produit en croix,
$$2p_3c_3^A = c_1^A.$$
Ainsi,
$$\boxed{c_1^A = 2p_3c_3^A.}$$

Comparons enfin les biens 1 et 4 :
$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_4^A} = \frac{1}{p_4}.$$
Or
$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_4^A} = \frac{2c_1^A c_2^A c_3^A (c_4^A)^2}{2(c_1^A)^2 c_2^A c_3^A c_4^A} = \frac{c_4^A}{c_1^A}.$$
Donc
$$\frac{c_4^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_4}.$$
Par produit en croix,
$$p_4c_4^A = c_1^A.$$
Ainsi,
$$\boxed{c_1^A = p_4c_4^A.}$$

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire. Des relations précédentes, on tire

$$c_2^A = \frac{c_1^A}{2p_2}, \qquad c_3^A = \frac{c_1^A}{2p_3}, \qquad c_4^A = \frac{c_1^A}{p_4}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire de A :

$$c_1^A + p_2\left(\frac{c_1^A}{2p_2}\right) + p_3\left(\frac{c_1^A}{2p_3}\right) + p_4\left(\frac{c_1^A}{p_4}\right) = 60p_2.$$

Donc

$$c_1^A + \frac{1}{2}c_1^A + \frac{1}{2}c_1^A + c_1^A = 60p_2.$$

Ainsi,

$$3c_1^A = 60p_2.$$

On en déduit

$$c_1^A = 20p_2.$$

Puis

$$c_2^A = \frac{20p_2}{2p_2} = 10,$$
$$c_3^A = \frac{20p_2}{2p_3} = 10\frac{p_2}{p_3},$$
$$c_4^A = \frac{20p_2}{p_4} = 20\frac{p_2}{p_4}.$$

Conclusion. Les demandes walrassiennes de l'agent A sont

$$\boxed{c_1^A = 20p_2,} \qquad \boxed{c_2^A = 10,} \qquad \boxed{c_3^A = 10\frac{p_2}{p_3},} \qquad \boxed{c_4^A = 20\frac{p_2}{p_4}.}$$

Remarque. On retrouve bien les parts budgétaires de l'agent A :

$$\frac{2}{2+1+1+2} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{3}.$$

3. Demandes walrassiennes de l'agent B. L'agent B a pour utilité

$$U_B = \ln(c_1^B) + 2\ln(c_2^B) + \ln(c_3^B) + 2\ln(c_4^B).$$

Étape 1 : calcul des utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^B = \frac{1}{c_1^B}, \qquad \mathrm{Um}_2^B = \frac{2}{c_2^B}, \qquad \mathrm{Um}_3^B = \frac{1}{c_3^B}, \qquad \mathrm{Um}_4^B = \frac{2}{c_4^B}.$$

Étape 2 : conditions marginales d'optimalité. À l'optimum intérieur,

$$\frac{\mathrm{Um}_1^B}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2^B}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^B}{p_3} = \frac{\mathrm{Um}_4^B}{p_4}.$$

Comme $p_1 = 1$, cela devient

$$\frac{1}{c_1^B} = \frac{2}{p_2 c_2^B} = \frac{1}{p_3 c_3^B} = \frac{2}{p_4 c_4^B}.$$

Comparons d'abord les biens 1 et 2 :

$$\frac{1}{c_1^B} = \frac{2}{p_2 c_2^B}.$$

Par produit en croix,

$$p_2 c_2^B = 2c_1^B.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B = \frac{1}{2} p_2 c_2^B.}$$

Comparons ensuite les biens 1 et 3 :

$$\frac{1}{c_1^B} = \frac{1}{p_3 c_3^B}.$$

Donc

$$\boxed{c_1^B = p_3 c_3^B.}$$

Comparons enfin les biens 1 et 4 :

$$\frac{1}{c_1^B} = \frac{2}{p_4 c_4^B}.$$

Par produit en croix,

$$p_4 c_4^B = 2c_1^B.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B = \frac{1}{2} p_4 c_4^B.}$$

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire. Des relations précédentes, on tire

$$c_2^B = \frac{2c_1^B}{p_2}, \qquad c_3^B = \frac{c_1^B}{p_3}, \qquad c_4^B = \frac{2c_1^B}{p_4}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire de B :

$$c_1^B + p_2 \left(\frac{2c_1^B}{p_2} \right) + p_3 \left(\frac{c_1^B}{p_3} \right) + p_4 \left(\frac{2c_1^B}{p_4} \right) = 60 + 30p_2 + 100p_3 + 400p_4.$$

Donc

$$c_1^B + 2c_1^B + c_1^B + 2c_1^B = 60 + 30p_2 + 100p_3 + 400p_4.$$

Ainsi,

$$6c_1^B = 60 + 30p_2 + 100p_3 + 400p_4.$$

On en déduit

$$c_1^B = 10 + 5p_2 + \frac{50}{3}p_3 + \frac{200}{3}p_4.$$

Puis

$$c_2^B = \frac{2c_1^B}{p_2} = \frac{20}{p_2} + 10 + \frac{100}{3}\frac{p_3}{p_2} + \frac{400}{3}\frac{p_4}{p_2},$$
$$c_3^B = \frac{c_1^B}{p_3} = \frac{10}{p_3} + 5\frac{p_2}{p_3} + \frac{50}{3} + \frac{200}{3}\frac{p_4}{p_3},$$
$$c_4^B = \frac{2c_1^B}{p_4} = \frac{20}{p_4} + 10\frac{p_2}{p_4} + \frac{100}{3}\frac{p_3}{p_4} + \frac{400}{3}.$$

Conclusion. Les demandes walrassiennes de l'agent B sont

$$\boxed{c_1^B = 10 + 5p_2 + \frac{50}{3}p_3 + \frac{200}{3}p_4,}$$

$$\boxed{c_2^B = \frac{20}{p_2} + 10 + \frac{100}{3}\frac{p_3}{p_2} + \frac{400}{3}\frac{p_4}{p_2},}$$

$$\boxed{c_3^B = \frac{10}{p_3} + 5\frac{p_2}{p_3} + \frac{50}{3} + \frac{200}{3}\frac{p_4}{p_3},}$$

$$\boxed{c_4^B = \frac{20}{p_4} + 10\frac{p_2}{p_4} + \frac{100}{3}\frac{p_3}{p_4} + \frac{400}{3}.}$$

Remarque essentielle. Les parts budgétaires de l'agent B sont

$$\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{3}.$$

Ainsi, les deux agents ont :

— les *mêmes* parts budgétaires pour les biens 3 et 4 :

$$\frac{1}{6} \text{ pour le bien 3,} \qquad \frac{1}{3} \text{ pour le bien 4;}$$

— mais des parts budgétaires *différentes* pour les biens 1 et 2.

C'est cette structure mixte qui fait tout l'intérêt de l'exercice.

4. Pourquoi les biens 3 et 4 s'agrègent-ils, mais pas les biens 1 et 2 ? Étape 1 : revenu total de l'économie. La dotation agrégée de l'économie est

$$\bar{\omega} = \omega^A + \omega^B = (60, 90, 100, 400).$$

Sa valeur est donc

$$M(p) = p \cdot \bar{\omega} = 60 + 90p_2 + 100p_3 + 400p_4.$$

Étape 2 : bien 3. L'agent A consacre la part

$$\frac{1}{6}$$

de son revenu au bien 3, et l'agent B consacre lui aussi la part

$$\frac{1}{6}$$

de son revenu au bien 3. La demande agrégée du bien 3 vaut donc

$$C_3(p) = \frac{1}{6}\frac{m_A}{p_3} + \frac{1}{6}\frac{m_B}{p_3} = \frac{1}{6}\frac{m_A + m_B}{p_3} = \boxed{\frac{1}{6}\frac{M(p)}{p_3}.}$$

Étape 3 : bien 4. De même, les deux agents consacrent la part

$$\frac{1}{3}$$

de leur revenu au bien 4. On a donc

$$C_4(p) = \frac{1}{3}\frac{m_A}{p_4} + \frac{1}{3}\frac{m_B}{p_4} = \frac{1}{3}\frac{M(p)}{p_4} = \boxed{\frac{1}{3}\frac{M(p)}{p_4}.}$$

Étape 4 : biens 1 et 2. En revanche, pour le bien 1, les parts budgétaires sont

$$\frac{1}{3} \text{ pour } A, \qquad \frac{1}{6} \text{ pour } B.$$

Donc

$$C_1(p) = \frac{1}{3}m_A + \frac{1}{6}m_B,$$

ce qui ne peut pas se réécrire, en général, sous la forme

$$\theta_1 M(p)$$

avec un coefficient constant indépendant de la répartition des revenus.

De même, pour le bien 2, les parts budgétaires sont

$$\frac{1}{6} \text{ pour } A, \qquad \frac{1}{3} \text{ pour } B,$$

et

$$C_2(p) = \frac{1}{6}\frac{m_A}{p_2} + \frac{1}{3}\frac{m_B}{p_2}.$$

Conclusion. Les demandes agrégées des biens 3 et 4 dépendent uniquement du revenu total

$M(p)$, car les deux agents ont les mêmes parts budgétaires pour ces biens. Ce n'est pas le cas pour les biens 1 et 2, car les parts budgétaires y diffèrent.

5. Conditions d'équilibre général et détermination des prix d'équilibre. Étape 1 : dotation agrégée. On a

$$\bar{\omega} = (60, 90, 100, 400).$$

Les conditions d'équilibre de marché sont donc

$$c_1^A + c_1^B = 60,$$

$$c_2^A + c_2^B = 90,$$

$$c_3^A + c_3^B = 100,$$

$$c_4^A + c_4^B = 400.$$

Rappel sur la loi de Walras. Comme il y a quatre biens, une des quatre équations de marché est redondante. Il suffit donc d'en résoudre trois.

Étape 2 : utiliser les marchés des biens 3 et 4.

Comme on l'a montré à la question précédente,

$$C_3(p) = \frac{1}{6}\frac{M(p)}{p_3}, \qquad C_4(p) = \frac{1}{3}\frac{M(p)}{p_4},$$

où

$$M(p) = 60 + 90p_2 + 100p_3 + 400p_4.$$

L'équilibre sur le bien 3 donne

$$\frac{1}{6}\frac{M(p)}{p_3} = 100.$$

Donc

$$\boxed{M(p) = 600p_3.}$$

L'équilibre sur le bien 4 donne

$$\frac{1}{3}\frac{M(p)}{p_4} = 400.$$

Donc

$$\boxed{M(p) = 1200p_4.}$$

En comparant ces deux expressions de $M(p)$, on obtient

$$600p_3 = 1200p_4,$$

soit

$$\boxed{p_3 = 2p_4.}$$

Étape 3 : utiliser l'identité de revenu total. Par définition,

$$M(p) = 60 + 90p_2 + 100p_3 + 400p_4.$$

Comme

$$M(p) = 1200p_4 \qquad \text{et} \qquad p_3 = 2p_4,$$

on obtient

$$60 + 90p_2 + 100(2p_4) + 400p_4 = 1200p_4.$$

Donc

$$60 + 90p_2 + 600p_4 = 1200p_4.$$

Ainsi,

$$90p_2 = 600p_4 - 60.$$

On retiendra cette relation sous la forme

$$\boxed{90p_2 = 600p_4 - 60.}$$

Étape 4 : utiliser le marché du bien 1.

Pour le bien 1, on a

$$C_1(p) = \frac{1}{3}m_A + \frac{1}{6}m_B.$$

Or

$$m_A = 60p_2, \qquad m_B = M(p) - m_A.$$

Donc

$$C_1(p) = \frac{1}{3}m_A + \frac{1}{6}(M - m_A) = \frac{1}{6}(M + m_A).$$

L'équilibre sur le bien 1 donne

$$\frac{1}{6}(M + m_A) = 60.$$

Comme

$$m_A = 60p_2,$$

on obtient

$$\frac{1}{6}(M + 60p_2) = 60.$$

Donc

$$\boxed{M + 60p_2 = 360.}$$

Or

$$M = 1200p_4.$$

D'où

$$1200p_4 + 60p_2 = 360.$$

Étape 5 : résolution du système.

Nous disposons des deux relations

$$\begin{cases} 90p_2 = 600p_4 - 60, \\ 1200p_4 + 60p_2 = 360. \end{cases}$$

De la première, on tire

$$p_2 = \frac{600p_4 - 60}{90} = \frac{20}{3}p_4 - \frac{2}{3}.$$

On remplace dans la seconde :

$$1200p_4 + 60\left(\frac{20}{3}p_4 - \frac{2}{3}\right) = 360.$$

Calculons :

$$60 \cdot \frac{20}{3}p_4 = 400p_4, \qquad 60 \cdot \frac{2}{3} = 40.$$

Donc

$$1200p_4 + 400p_4 - 40 = 360.$$

Ainsi,

$$1600p_4 = 400.$$

D'où

$$\boxed{p_4^* = \frac{1}{4}.}$$

Alors

$$p_3^* = 2p_4^* = \frac{1}{2}.$$

Enfin, en utilisant

$$90p_2 = 600p_4 - 60,$$

on obtient

$$90p_2 = 600 \cdot \frac{1}{4} - 60 = 150 - 60 = 90.$$

Donc

$$\boxed{p_2^* = 1.}$$

Conclusion. Les prix d'équilibre sont

$$\boxed{(p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*) = \left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).}$$

6. Allocation d'équilibre. Il suffit de remplacer (p_2, p_3, p_4) par $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ dans les demandes individuelles.

Agent A. Comme

$$m_A = 60p_2,$$

on obtient à l'équilibre

$$m_A^* = 60.$$

Ses parts budgétaires sont

$$\frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{3}.$$

Donc

$$c_1^{A*} = \frac{1}{3} \cdot 60 = 20,$$

$$c_2^{A*} = \frac{1}{6}\frac{60}{1} = 10,$$

$$c_3^{A*} = \frac{1}{6}\frac{60}{1/2} = 20,$$

$$c_4^{A*} = \frac{1}{3}\frac{60}{1/4} = 80.$$

Ainsi,

$$\boxed{c^{A*} = (20, 10, 20, 80).}$$

Agent B. Sa richesse à l'équilibre vaut

$$m_B^* = 60 + 30 \cdot 1 + 100 \cdot \frac{1}{2} + 400 \cdot \frac{1}{4}.$$

Calculons :

$$60 + 30 + 50 + 100 = 240.$$

Donc

$$m_B^* = 240.$$

Ses parts budgétaires sont

$$\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$c_1^{B*} = \frac{1}{6} \cdot 240 = 40,$$

$$c_2^{B*} = \frac{1}{3}\frac{240}{1} = 80,$$

$$c_3^{B*} = \frac{1}{6}\frac{240}{1/2} = 80,$$

$$c_4^{B*} = \frac{1}{3}\frac{240}{1/4} = 320.$$

Donc

$$\boxed{c^{B*} = (40, 80, 80, 320).}$$

Vérification des marchés. On a

$$20 + 40 = 60, \qquad 10 + 80 = 90, \qquad 20 + 80 = 100, \qquad 80 + 320 = 400.$$

Tous les marchés sont bien équilibrés.

7. Effet d'un transfert monétaire T de B vers A. On met en place un transfert monétaire de montant T au profit de A, au détriment de B.

Les nouveaux revenus sont donc

$$m'_A = m_A + T = 60p_2 + T,$$

$$m'_B = m_B - T = 60 + 30p_2 + 100p_3 + 400p_4 - T.$$

Le revenu total de l'économie ne change pas :

$$M(p) = m'_A + m'_B = 60 + 90p_2 + 100p_3 + 400p_4.$$

Étape 1 : marchés des biens 3 et 4.

Les deux agents continuent à consacrer :

$$\frac{1}{6} \text{ de leur revenu au bien 3,} \qquad \frac{1}{3} \text{ de leur revenu au bien 4.}$$

La demande agrégée de ces deux biens ne dépend donc toujours que du revenu total $M(p)$:

$$C_3(p) = \frac{1}{6}\frac{M(p)}{p_3}, \qquad C_4(p) = \frac{1}{3}\frac{M(p)}{p_4}.$$

Les équilibres des marchés 3 et 4 donnent donc encore

$$M(p) = 600p_3, \qquad M(p) = 1200p_4,$$

d'où

$$\boxed{p_3 = 2p_4.}$$

Comme précédemment, en utilisant

$$M(p) = 60 + 90p_2 + 100p_3 + 400p_4,$$

on obtient

$$60 + 90p_2 + 600p_4 = 1200p_4,$$

soit

$$\boxed{90p_2 = 600p_4 - 60.}$$

Étape 2 : marché du bien 1.

Avec le transfert, la demande agrégée du bien 1 vaut

$$C_1(p) = \frac{1}{3}m'_A + \frac{1}{6}m'_B.$$

En remplaçant m'_A et m'_B, on obtient

$$C_1(p) = \frac{1}{3}(60p_2 + T) + \frac{1}{6}(M - 60p_2 - T).$$

Regroupons les termes :

$$C_1(p) = \frac{1}{6}M + \frac{1}{6}(60p_2) + \frac{1}{6}T.$$

Donc

$$\boxed{C_1(p) = \frac{1}{6}(M + 60p_2 + T).}$$

L'équilibre sur le bien 1 impose

$$\frac{1}{6}(M + 60p_2 + T) = 60.$$

Ainsi,

$$\boxed{M + 60p_2 + T = 360.}$$

Or

$$M = 1200p_4.$$

On obtient donc

$$1200p_4 + 60p_2 + T = 360.$$

Étape 3 : résolution du système.

Nous devons résoudre

$$\begin{cases} 90p_2 = 600p_4 - 60, \\ 1200p_4 + 60p_2 + T = 360. \end{cases}$$

De la première équation,

$$p_2 = \frac{600p_4 - 60}{90} = \frac{20}{3}p_4 - \frac{2}{3}.$$

On remplace dans la seconde :

$$1200p_4 + 60\left(\frac{20}{3}p_4 - \frac{2}{3}\right) + T = 360.$$

Calculons :

$$60 \cdot \frac{20}{3}p_4 = 400p_4, \qquad 60 \cdot \frac{2}{3} = 40.$$

Donc

$$1200p_4 + 400p_4 - 40 + T = 360.$$

Ainsi,

$$1600p_4 = 400 - T.$$

On en déduit

$$\boxed{p_4^*(T) = \frac{1}{4} - \frac{T}{1600}.}$$

Comme

$$p_3 = 2p_4,$$

on obtient

$$\boxed{p_3^*(T) = \frac{1}{2} - \frac{T}{800}.}$$

Enfin, à partir de

$$90p_2 = 600p_4 - 60,$$

on trouve

$$90p_2 = 600\left(\frac{1}{4} - \frac{T}{1600}\right) - 60 = 150 - \frac{3T}{8} - 60 = 90 - \frac{3T}{8}.$$

Donc

$$p_2^*(T) = 1 - \frac{T}{240}.$$

Ainsi,

$$\boxed{p_2^*(T) = 1 - \frac{T}{240}, \qquad p_3^*(T) = \frac{1}{2} - \frac{T}{800}, \qquad p_4^*(T) = \frac{1}{4} - \frac{T}{1600}.}$$

Condition de positivité des prix. Pour que les prix demeurent strictement positifs, il faut en particulier

$$p_2^*(T) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T < 240.$$

Les autres contraintes,

$$T < 400 \quad \text{et} \quad T < 400,$$

sont moins restrictives. Il suffit donc de supposer

$$\boxed{T < 240.}$$

Commentaire économique.

Le transfert de revenu vers A modifie la demande agrégée parce que A et B n'ont pas les mêmes parts budgétaires pour les biens 1 et 2.

En effet :

— l'agent A consacre
$$\frac{1}{3}$$
de son revenu au bien 1, tandis que B n'y consacre que
$$\frac{1}{6};$$

— inversement, B consacre
$$\frac{1}{3}$$
de son revenu au bien 2, tandis que A n'y consacre que
$$\frac{1}{6}.$$

Par conséquent, lorsque l'on transfère du revenu de B vers A :

— la demande relative du bien 1 augmente ;
— la demande relative du bien 2 diminue.

Comme le bien 1 est le numéraire, cette hausse de la demande relative du bien 1 se traduit par une baisse de tous les autres prix relativement au bien 1 :

$$p_2, \quad p_3, \quad p_4$$

diminuent tous avec T.

Point subtil et important. Les biens 3 et 4 ont pourtant des parts budgétaires identiques chez les deux agents. Le transfert ne modifie donc pas directement leurs demandes agrégées *pour un vecteur de prix donné*. Mais les prix d'équilibre de ces biens changent néanmoins, parce que l'ensemble du système de prix doit s'ajuster pour satisfaire simultanément tous les équilibres de marché, compte tenu du fait que le bien 1 est pris comme numéraire.

Réponse finale.

Contraintes budgétaires :

$$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A + p_4 c_4^A = 60 p_2,$$
$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B + p_4 c_4^B = 60 + 30 p_2 + 100 p_3 + 400 p_4.$$

Demandes de A :

$$c_1^A = 20 p_2, \quad c_2^A = 10, \quad c_3^A = 10\frac{p_2}{p_3}, \quad c_4^A = 20\frac{p_2}{p_4}.$$

Demandes de B :

$$c_1^B = 10 + 5p_2 + \frac{50}{3}p_3 + \frac{200}{3}p_4,$$
$$c_2^B = \frac{20}{p_2} + 10 + \frac{100}{3}\frac{p_3}{p_2} + \frac{400}{3}\frac{p_4}{p_2},$$
$$c_3^B = \frac{10}{p_3} + 5\frac{p_2}{p_3} + \frac{50}{3} + \frac{200}{3}\frac{p_4}{p_3},$$
$$c_4^B = \frac{20}{p_4} + 10\frac{p_2}{p_4} + \frac{100}{3}\frac{p_3}{p_4} + \frac{400}{3}.$$

Les biens 3 et 4 s'agrègent car les parts budgétaires y sont identiques pour A et B, ce qui n'est pas le cas pour les biens 1 et 2.

Prix d'équilibre initiaux :

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*) = \left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Allocation d'équilibre :

$$c^{A*} = (20, 10, 20, 80),$$
$$c^{B*} = (40, 80, 80, 320).$$

Après un transfert T de B vers A, les nouveaux prix d'équilibre sont

$$p_2^*(T) = 1 - \frac{T}{240}, \qquad p_3^*(T) = \frac{1}{2} - \frac{T}{800}, \qquad p_4^*(T) = \frac{1}{4} - \frac{T}{1600},$$

pour $T < 240$.

Le transfert augmente la demande relative du bien 1, pris comme numéraire, et fait donc baisser tous les autres prix relativement à lui.

Corrigé de l'exercice 5

On considère une économie d'échanges à trois biens et trois agents, avec préférences

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A, \qquad U_B = \ln(c_1^B) + 2\ln(c_2^B) + \ln(c_3^B), \qquad U_C = \ln(c_1^C) + \ln(c_2^C) + 2\ln(c_3^C),$$

et dotations initiales

$$\omega^A = (120, 0, 0), \qquad \omega^B = (0, 120, 0), \qquad \omega^C = (0, 0, 120).$$

Le bien 1 est choisi comme numéraire :

$$p_1 = 1, \qquad p_2 > 0, \qquad p_3 > 0.$$

1. Contraintes budgétaires des trois agents. **Rappel de cours.** Dans une économie d'échanges, la richesse de chaque agent est égale à la valeur marchande de sa dotation initiale :

$$m_i = p \cdot \omega^i.$$

La contrainte budgétaire de l'agent i s'écrit donc

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i.$$

Comme les préférences sont ici strictement croissantes, la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum :

$$p \cdot c^i = p \cdot \omega^i.$$

Agent A. Sa dotation est

$$\omega^A = (120, 0, 0).$$

La valeur de cette dotation est

$$m_A = 1 \cdot 120 + p_2 \cdot 0 + p_3 \cdot 0 = 120.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A = 120.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A = 120.}$$

Agent B. Sa dotation est

$$\omega^B = (0, 120, 0).$$

La valeur de cette dotation est

$$m_B = 1 \cdot 0 + p_2 \cdot 120 + p_3 \cdot 0 = 120 p_2.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 120 p_2.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 120 p_2.}$$

Agent C. Sa dotation est

$$\omega^C = (0, 0, 120).$$

La valeur de cette dotation est

$$m_C = 1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0 + p_3 \cdot 120 = 120 p_3.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^C + p_2 c_2^C + p_3 c_3^C = 120 p_3.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^C + p_2 c_2^C + p_3 c_3^C = 120 p_3.}$$

2. Demandes walrassiennes de l'agent A. L'agent A a pour utilité

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A.$$

Étape 1 : calcul des utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^A = 2 c_1^A c_2^A c_3^A, \qquad \mathrm{Um}_2^A = (c_1^A)^2 c_3^A, \qquad \mathrm{Um}_3^A = (c_1^A)^2 c_2^A.$$

Étape 2 : conditions marginales d'optimalité. À l'optimum intérieur, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2^A}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^A}{p_3}.$$

Comme $p_1 = 1$, cela donne

$$\mathrm{Um}_1^A = \frac{\mathrm{Um}_2^A}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^A}{p_3}.$$

Comparons les biens 1 et 2 :

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_2^A} = \frac{1}{p_2}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_2^A} = \frac{2 c_1^A c_2^A c_3^A}{(c_1^A)^2 c_3^A} = 2 \frac{c_2^A}{c_1^A}.$$

Donc

$$2 \frac{c_2^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_2}.$$

Par produit en croix,

$$2p_2c_2^A = c_1^A.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A = 2p_2c_2^A.}$$

Comparons maintenant les biens 1 et 3 :

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_3^A} = \frac{1}{p_3}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_3^A} = \frac{2c_1^Ac_2^Ac_3^A}{(c_1^A)^2c_2^A} = 2\frac{c_3^A}{c_1^A}.$$

Donc

$$2\frac{c_3^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_3}.$$

Par produit en croix,

$$2p_3c_3^A = c_1^A.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A = 2p_3c_3^A.}$$

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire. Des deux relations précédentes, on tire

$$c_2^A = \frac{c_1^A}{2p_2}, \qquad c_3^A = \frac{c_1^A}{2p_3}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire :

$$c_1^A + p_2\left(\frac{c_1^A}{2p_2}\right) + p_3\left(\frac{c_1^A}{2p_3}\right) = 120.$$

Donc

$$c_1^A + \frac{1}{2}c_1^A + \frac{1}{2}c_1^A = 120.$$

Ainsi,

$$2c_1^A = 120.$$

On en déduit

$$c_1^A = 60.$$

Puis

$$c_2^A = \frac{60}{2p_2} = \frac{30}{p_2}, \qquad c_3^A = \frac{60}{2p_3} = \frac{30}{p_3}.$$

Conclusion. Les demandes walrassiennes de l'agent A sont

$$\boxed{c_1^A = 60,} \qquad \boxed{c_2^A = \frac{30}{p_2},} \qquad \boxed{c_3^A = \frac{30}{p_3}.}$$

Remarque. On retrouve bien les parts budgétaires de l'agent A :

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{4}.$$

3. Demandes walrassiennes des agents B et C.

Agent B. L'agent B a pour utilité

$$U_B = \ln(c_1^B) + 2\ln(c_2^B) + \ln(c_3^B).$$

Étape 1 : utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^B = \frac{1}{c_1^B}, \qquad \mathrm{Um}_2^B = \frac{2}{c_2^B}, \qquad \mathrm{Um}_3^B = \frac{1}{c_3^B}.$$

Étape 2 : conditions marginales. À l'optimum intérieur,

$$\frac{1}{c_1^B} = \frac{2}{p_2 c_2^B} = \frac{1}{p_3 c_3^B}.$$

En comparant les biens 1 et 2,

$$\frac{1}{c_1^B} = \frac{2}{p_2 c_2^B} \qquad \Longrightarrow \qquad p_2 c_2^B = 2c_1^B.$$

Donc

$$\boxed{c_1^B = \frac{1}{2} p_2 c_2^B.}$$

En comparant les biens 1 et 3,

$$\frac{1}{c_1^B} = \frac{1}{p_3 c_3^B} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{c_1^B = p_3 c_3^B.}$$

On en déduit

$$c_2^B = \frac{2c_1^B}{p_2}, \qquad c_3^B = \frac{c_1^B}{p_3}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire

$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 120 p_2.$$

Cela donne

$$c_1^B + p_2\left(\frac{2c_1^B}{p_2}\right) + p_3\left(\frac{c_1^B}{p_3}\right) = 120p_2,$$

soit

$$c_1^B + 2c_1^B + c_1^B = 120p_2.$$

Donc

$$4c_1^B = 120p_2.$$

On en déduit

$$c_1^B = 30p_2.$$

Puis

$$c_2^B = \frac{2c_1^B}{p_2} = 60, \qquad c_3^B = \frac{c_1^B}{p_3} = 30\frac{p_2}{p_3}.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B = 30p_2,} \qquad \boxed{c_2^B = 60,} \qquad \boxed{c_3^B = 30\frac{p_2}{p_3}.}$$

Agent C. L'agent C a pour utilité

$$U_C = \ln(c_1^C) + \ln(c_2^C) + 2\ln(c_3^C).$$

Étape 1 : utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^C = \frac{1}{c_1^C}, \qquad \mathrm{Um}_2^C = \frac{1}{c_2^C}, \qquad \mathrm{Um}_3^C = \frac{2}{c_3^C}.$$

Étape 2 : conditions marginales. À l'optimum intérieur,

$$\frac{1}{c_1^C} = \frac{1}{p_2c_2^C} = \frac{2}{p_3c_3^C}.$$

En comparant les biens 1 et 2,

$$\frac{1}{c_1^C} = \frac{1}{p_2c_2^C} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{c_1^C = p_2c_2^C.}$$

En comparant les biens 1 et 3,

$$\frac{1}{c_1^C} = \frac{2}{p_3c_3^C} \qquad \Longrightarrow \qquad p_3c_3^C = 2c_1^C.$$

Donc

$$\boxed{c_1^C = \frac{1}{2}p_3c_3^C.}$$

On en déduit

$$c_2^C = \frac{c_1^C}{p_2}, \qquad c_3^C = \frac{2c_1^C}{p_3}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire

$$c_1^C + p_2 c_2^C + p_3 c_3^C = 120 p_3.$$

Cela donne

$$c_1^C + p_2\left(\frac{c_1^C}{p_2}\right) + p_3\left(\frac{2c_1^C}{p_3}\right) = 120p_3,$$

soit

$$c_1^C + c_1^C + 2c_1^C = 120p_3.$$

Donc

$$4c_1^C = 120p_3.$$

On en déduit

$$c_1^C = 30p_3.$$

Puis

$$c_2^C = \frac{30p_3}{p_2} = 30\frac{p_3}{p_2}, \qquad c_3^C = \frac{2 \cdot 30p_3}{p_3} = 60.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^C = 30p_3,} \qquad \boxed{c_2^C = 30\frac{p_3}{p_2},} \qquad \boxed{c_3^C = 60.}$$

4. Conditions d'équilibre général et détermination des prix d'équilibre. Étape 1 : dotation agregée. Les ressources totales de l'économie sont

$$\bar{\omega} = (120, 120, 120).$$

Les conditions d'équilibre de marché sont donc :

$$c_1^A + c_1^B + c_1^C = 120,$$

$$c_2^A + c_2^B + c_2^C = 120,$$

$$c_3^A + c_3^B + c_3^C = 120.$$

Rappel sur la loi de Walras. Comme il y a trois biens, une des trois équations de marché est redondante. Il suffit donc d'en résoudre deux.

Étape 2 : écrire les demandes agrégées.

Pour le bien 1,

$$C_1(p) = c_1^A + c_1^B + c_1^C = 60 + 30p_2 + 30p_3.$$

Pour le bien 2,

$$C_2(p) = c_2^A + c_2^B + c_2^C = \frac{30}{p_2} + 60 + 30\frac{p_3}{p_2}.$$

Pour le bien 3,

$$C_3(p) = c_3^A + c_3^B + c_3^C = \frac{30}{p_3} + 30\frac{p_2}{p_3} + 60.$$

Étape 3 : résoudre les équilibres de marché.

Commençons par le marché du bien 1 :

$$60 + 30p_2 + 30p_3 = 120.$$

Donc

$$30p_2 + 30p_3 = 60.$$

En divisant par 30,

$$\boxed{p_2 + p_3 = 2.}$$

Passons ensuite au marché du bien 2 :

$$\frac{30}{p_2} + 60 + 30\frac{p_3}{p_2} = 120.$$

Donc

$$\frac{30}{p_2} + 30\frac{p_3}{p_2} = 60.$$

En multipliant par p_2,

$$30 + 30p_3 = 60p_2.$$

En divisant par 30,

$$\boxed{1 + p_3 = 2p_2.}$$

Nous devons donc résoudre le système

$$\begin{cases} p_2 + p_3 = 2, \\ 1 + p_3 = 2p_2. \end{cases}$$

De la première équation,

$$p_2 = 2 - p_3.$$

On remplace dans la seconde :

$$1 + p_3 = 2(2 - p_3).$$

Donc

$$1 + p_3 = 4 - 2p_3.$$

Ainsi,

$$3p_3 = 3.$$

D'où

$$\boxed{p_3^* = 1.}$$

Puis

$$p_2^* = 2 - p_3^* = 1.$$

Conclusion. Les prix d'équilibre sont

$$\boxed{(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (1, 1, 1).}$$

5. Allocation d'équilibre. Il suffit de remplacer $(p_2, p_3) = (1, 1)$ dans les demandes individuelles.

Pour l'agent A,

$$c^{A*} = (60, 30, 30).$$

Pour l'agent B,

$$c^{B*} = (30, 60, 30).$$

Pour l'agent C,

$$c^{C*} = (30, 30, 60).$$

Ainsi,

$$\boxed{c^{A*} = (60, 30, 30),} \qquad \boxed{c^{B*} = (30, 60, 30),} \qquad \boxed{c^{C*} = (30, 30, 60).}$$

Vérification des marchés. On a

$$60 + 30 + 30 = 120, \qquad 30 + 60 + 30 = 120, \qquad 30 + 30 + 60 = 120.$$

Tous les marchés sont bien équilibrés.

6. Effet d'un transfert monétaire T de C vers A. On met en place un transfert monétaire de montant T au profit de A, au détriment de C.

Les nouveaux revenus deviennent :

$$m'_A = 120 + T, \qquad m'_B = 120p_2, \qquad m'_C = 120p_3 - T.$$

Étape 1 : nouvelles demandes individuelles.

Les parts budgétaires des agents ne changent pas.

Pour l'agent A, on a toujours les parts

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{4}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
c_1^A &= \frac{1}{2}(120+T) = 60 + \frac{T}{2}, \\
c_2^A &= \frac{1}{4}\frac{120+T}{p_2} = \frac{30}{p_2} + \frac{T}{4p_2}, \\
c_3^A &= \frac{1}{4}\frac{120+T}{p_3} = \frac{30}{p_3} + \frac{T}{4p_3}.
\end{aligned}$$

Pour l'agent B, rien ne change :

$$c_1^B = 30p_2, \qquad c_2^B = 60, \qquad c_3^B = 30\frac{p_2}{p_3}.$$

Pour l'agent C, les parts sont toujours

$$\frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
c_1^C &= \frac{1}{4}(120p_3 - T) = 30p_3 - \frac{T}{4}, \\
c_2^C &= \frac{1}{4}\frac{120p_3 - T}{p_2} = 30\frac{p_3}{p_2} - \frac{T}{4p_2}, \\
c_3^C &= \frac{1}{2}\frac{120p_3 - T}{p_3} = 60 - \frac{T}{2p_3}.
\end{aligned}$$

Étape 2 : nouvelles demandes agrégées.

Pour le bien 1,

$$C_1(p) = \left(60 + \frac{T}{2}\right) + 30p_2 + \left(30p_3 - \frac{T}{4}\right).$$

Donc

$$\boxed{C_1(p) = 60 + 30p_2 + 30p_3 + \frac{T}{4}.}$$

Pour le bien 2,

$$C_2(p) = \left(\frac{30}{p_2} + \frac{T}{4p_2}\right) + 60 + \left(30\frac{p_3}{p_2} - \frac{T}{4p_2}\right).$$

Les termes en T se simplifient, donc

$$\boxed{C_2(p) = \frac{30}{p_2} + 60 + 30\frac{p_3}{p_2}.}$$

Pour le bien 3,

$$C_3(p) = \left(\frac{30}{p_3} + \frac{T}{4p_3}\right) + 30\frac{p_2}{p_3} + \left(60 - \frac{T}{2p_3}\right).$$

Donc

$$\boxed{C_3(p) = \frac{30}{p_3} + 30\frac{p_2}{p_3} + 60 - \frac{T}{4p_3}.}$$

Étape 3 : nouvelles conditions d'équilibre.

Le marché du bien 1 donne

$$60 + 30p_2 + 30p_3 + \frac{T}{4} = 120.$$

Donc

$$30p_2 + 30p_3 = 60 - \frac{T}{4}.$$

En divisant par 30,

$$\boxed{p_2 + p_3 = 2 - \frac{T}{120}.}$$

Le marché du bien 2 donne

$$\frac{30}{p_2} + 60 + 30\frac{p_3}{p_2} = 120.$$

C'est exactement la même équation qu'avant le transfert :

$$\frac{30}{p_2} + 30\frac{p_3}{p_2} = 60.$$

En multipliant par p_2,

$$30 + 30p_3 = 60p_2.$$

Donc

$$\boxed{1 + p_3 = 2p_2.}$$

Nous devons donc résoudre

$$\begin{cases} p_2 + p_3 = 2 - \dfrac{T}{120}, \\ 1 + p_3 = 2p_2. \end{cases}$$

De la première équation,

$$p_2 = 2 - \frac{T}{120} - p_3.$$

On remplace dans la seconde :

$$1 + p_3 = 2\left(2 - \frac{T}{120} - p_3\right).$$

Donc

$$1 + p_3 = 4 - \frac{T}{60} - 2p_3.$$

Ainsi,

$$3p_3 = 3 - \frac{T}{60}.$$

On en déduit

$$\boxed{p_3^*(T) = 1 - \frac{T}{180}.}$$

Puis

$$p_2^*(T) = 2 - \frac{T}{120} - p_3^*(T) = 2 - \frac{T}{120} - \left(1 - \frac{T}{180}\right).$$

Donc

$$p_2^*(T) = 1 - \frac{T}{120} + \frac{T}{180} = 1 - \frac{T}{360}.$$

Ainsi,

$$\boxed{p_2^*(T) = 1 - \frac{T}{360}, \qquad p_3^*(T) = 1 - \frac{T}{180}.}$$

Condition de positivité des prix. Pour que les prix demeurent strictement positifs, il suffit en particulier que

$$p_3^*(T) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T < 180.$$

La contrainte

$$p_2^*(T) > 0 \Longleftrightarrow T < 360$$

est moins restrictive. Il suffit donc de supposer

$$\boxed{T < 180.}$$

7. Commentaire économique. Le transfert de revenu vers A modifie la demande agrégée parce que A et C n'ont pas les mêmes parts budgétaires pour les biens 1 et 3.

En effet :

— A consacre

$$\frac{1}{2}$$

de son revenu au bien 1, alors que C n'y consacre que

$$\frac{1}{4};$$

— inversement, C consacre

$$\frac{1}{2}$$

de son revenu au bien 3, alors que A n'y consacre que

$$\frac{1}{4}.$$

Un transfert de revenu de C vers A accroît donc la demande relative du bien 1 et réduit la demande relative du bien 3. Comme le bien 1 est le numéraire, les prix des autres biens baissent relativement à lui.

Pourquoi le marché du bien 2 **garde-t-il la même équation ?** Parce que A et C consacrent exactement la même part de leur revenu au bien 2, à savoir

$$\frac{1}{4}.$$

Le transfert T augmente donc la demande de A pour le bien 2 d'un montant

$$\frac{T}{4p_2},$$

mais réduit celle de C du même montant

$$\frac{T}{4p_2}.$$

Ces deux effets se compensent exactement dans la demande agrégée du bien 2.

Pourquoi les prix changent-ils malgré tout ? Parce qu'un équilibre général est un système d'équations interdépendantes. Même si le marché du bien 2 est décrit par la même équation qu'avant le transfert, le marché du bien 1 change. Cette modification suffit à déplacer le vecteur de prix d'équilibre. Le marché du bien 2, bien qu'inchangé dans sa forme, est alors satisfait à un nouveau couple de prix.

Réponse finale.

Contraintes budgétaires :

$$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A = 120,$$
$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B = 120 p_2,$$
$$c_1^C + p_2 c_2^C + p_3 c_3^C = 120 p_3.$$

Demandes de A :

$$c_1^A = 60, \quad c_2^A = \frac{30}{p_2}, \quad c_3^A = \frac{30}{p_3}.$$

Demandes de B :

$$c_1^B = 30 p_2, \quad c_2^B = 60, \quad c_3^B = 30\frac{p_2}{p_3}.$$

Demandes de C :

$$c_1^C = 30 p_3, \quad c_2^C = 30\frac{p_3}{p_2}, \quad c_3^C = 60.$$

Prix d'équilibre initiaux :

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (1, 1, 1).$$

Allocation d'équilibre :

$$c^{A*} = (60, 30, 30), \quad c^{B*} = (30, 60, 30), \quad c^{C*} = (30, 30, 60).$$

Après un transfert T de C vers A, les nouveaux prix d'équilibre sont

$$p_2^*(T) = 1 - \frac{T}{360}, \qquad p_3^*(T) = 1 - \frac{T}{180}, \qquad \text{pour } T < 180.$$

Le marché du bien 2 garde la même équation car A et C lui consacrent la même part budgétaire,
mais les prix changent quand même parce que le marché du bien 1 est modifié, et l'équilibre général s'ajuste

Corrigé de l'exercice 6

On considère une économie d'échanges à quatre biens et trois agents, avec préférences

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A c_4^A, \qquad U_B = 2\ln(c_1^B) + \ln(c_2^B) + \ln(c_3^B) + \ln(c_4^B), \qquad U_C = \ln(c_1^C) + \ln(c_2^C) + 2\ln(c_3^C) + \ln(c_4^C),$$

et dotations initiales

$$\omega^A = (0, 100, 0, 0), \qquad \omega^B = (100, 0, 0, 100), \qquad \omega^C = (0, 0, 200, 100).$$

Le bien 1 est choisi comme numéraire :

$$p_1 = 1, \qquad p_2 > 0, \qquad p_3 > 0, \qquad p_4 > 0.$$

1. Contraintes budgétaires des trois agents. **Rappel de cours.** Dans une économie d'échanges, la richesse de chaque agent est égale à la valeur marchande de sa dotation initiale :

$$m_i = p \cdot \omega^i.$$

La contrainte budgétaire s'écrit donc

$$p \cdot c^i \leq p \cdot \omega^i.$$

Comme les préférences sont ici strictement croissantes, la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum :

$$p \cdot c^i = p \cdot \omega^i.$$

Agent A. Sa dotation est

$$\omega^A = (0, 100, 0, 0).$$

La valeur de cette dotation vaut

$$m_A = 1 \cdot 0 + p_2 \cdot 100 + p_3 \cdot 0 + p_4 \cdot 0 = 100p_2.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A + p_4 c_4^A = 100p_2.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A + p_2 c_2^A + p_3 c_3^A + p_4 c_4^A = 100p_2.}$$

Agent B. Sa dotation est

$$\omega^B = (100, 0, 0, 100).$$

La valeur de cette dotation vaut

$$m_B = 1 \cdot 100 + p_2 \cdot 0 + p_3 \cdot 0 + p_4 \cdot 100 = 100 + 100p_4.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B + p_4 c_4^B = 100 + 100p_4.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B + p_4 c_4^B = 100 + 100p_4.}$$

Agent C. Sa dotation est

$$\omega^C = (0, 0, 200, 100).$$

La valeur de cette dotation vaut

$$m_C = 1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0 + p_3 \cdot 200 + p_4 \cdot 100 = 200p_3 + 100p_4.$$

Sa contrainte budgétaire est donc

$$c_1^C + p_2 c_2^C + p_3 c_3^C + p_4 c_4^C = 200p_3 + 100p_4.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^C + p_2 c_2^C + p_3 c_3^C + p_4 c_4^C = 200p_3 + 100p_4.}$$

2. Demandes walrassiennes de l'agent A. L'agent A a pour utilité

$$U_A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A c_4^A.$$

Étape 1 : calcul des utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^A = 2c_1^A c_2^A c_3^A c_4^A, \qquad \mathrm{Um}_2^A = (c_1^A)^2 c_3^A c_4^A,$$

$$\mathrm{Um}_3^A = (c_1^A)^2 c_2^A c_4^A, \qquad \mathrm{Um}_4^A = (c_1^A)^2 c_2^A c_3^A.$$

Étape 2 : conditions marginales d'optimalité. À l'optimum intérieur,

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{p_1} = \frac{\mathrm{Um}_2^A}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^A}{p_3} = \frac{\mathrm{Um}_4^A}{p_4}.$$

Comme $p_1 = 1$, cela devient

$$\mathrm{Um}_1^A = \frac{\mathrm{Um}_2^A}{p_2} = \frac{\mathrm{Um}_3^A}{p_3} = \frac{\mathrm{Um}_4^A}{p_4}.$$

Comparons d'abord les biens 1 et 2 :

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_2^A} = \frac{1}{p_2}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_2^A} = \frac{2c_1^A c_2^A c_3^A c_4^A}{(c_1^A)^2 c_3^A c_4^A} = 2\frac{c_2^A}{c_1^A}.$$

Donc

$$2\frac{c_2^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_2}.$$

Par produit en croix,

$$2p_2 c_2^A = c_1^A.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A = 2p_2 c_2^A.}$$

Comparons ensuite les biens 1 et 3 :

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_3^A} = \frac{1}{p_3}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_3^A} = \frac{2c_1^A c_2^A c_3^A c_4^A}{(c_1^A)^2 c_2^A c_4^A} = 2\frac{c_3^A}{c_1^A}.$$

Donc

$$2\frac{c_3^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_3}.$$

Par produit en croix,

$$2p_3 c_3^A = c_1^A.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A = 2p_3 c_3^A.}$$

Comparons enfin les biens 1 et 4 :

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_4^A} = \frac{1}{p_4}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{Um}_1^A}{\mathrm{Um}_4^A} = \frac{2c_1^A c_2^A c_3^A c_4^A}{(c_1^A)^2 c_2^A c_3^A} = 2\frac{c_4^A}{c_1^A}.$$

Donc

$$2\frac{c_4^A}{c_1^A} = \frac{1}{p_4}.$$

Par produit en croix,

$$2p_4 c_4^A = c_1^A.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^A = 2p_4 c_4^A.}$$

Étape 3 : utiliser la contrainte budgétaire. Des relations précédentes, on tire

$$c_2^A = \frac{c_1^A}{2p_2}, \qquad c_3^A = \frac{c_1^A}{2p_3}, \qquad c_4^A = \frac{c_1^A}{2p_4}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire :

$$c_1^A + p_2\left(\frac{c_1^A}{2p_2}\right) + p_3\left(\frac{c_1^A}{2p_3}\right) + p_4\left(\frac{c_1^A}{2p_4}\right) = 100p_2.$$

Donc

$$c_1^A + \frac{1}{2}c_1^A + \frac{1}{2}c_1^A + \frac{1}{2}c_1^A = 100p_2.$$

Ainsi,

$$\frac{5}{2}c_1^A = 100p_2.$$

On en déduit

$$c_1^A = 40p_2.$$

Puis

$$\begin{aligned} c_2^A &= \frac{40p_2}{2p_2} = 20, \\ c_3^A &= \frac{40p_2}{2p_3} = 20\frac{p_2}{p_3}, \\ c_4^A &= \frac{40p_2}{2p_4} = 20\frac{p_2}{p_4}. \end{aligned}$$

Conclusion. Les demandes walrassiennes de l'agent A sont

$$\boxed{c_1^A = 40p_2,} \qquad \boxed{c_2^A = 20,} \qquad \boxed{c_3^A = 20\frac{p_2}{p_3},} \qquad \boxed{c_4^A = 20\frac{p_2}{p_4}.}$$

Remarque. On retrouve bien les parts budgétaires de l'agent A :

$$\frac{2}{5}, \qquad \frac{1}{5}, \qquad \frac{1}{5}, \qquad \frac{1}{5}.$$

3. Demandes walrassiennes des agents B et C.

Agent B. L'agent B a pour utilité

$$U_B = 2\ln(c_1^B) + \ln(c_2^B) + \ln(c_3^B) + \ln(c_4^B).$$

Étape 1 : utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^B = \frac{2}{c_1^B}, \qquad \mathrm{Um}_2^B = \frac{1}{c_2^B}, \qquad \mathrm{Um}_3^B = \frac{1}{c_3^B}, \qquad \mathrm{Um}_4^B = \frac{1}{c_4^B}.$$

Étape 2 : conditions marginales. À l'optimum intérieur,

$$\frac{2}{c_1^B} = \frac{1}{p_2 c_2^B} = \frac{1}{p_3 c_3^B} = \frac{1}{p_4 c_4^B}.$$

En comparant les biens 1 et 2,

$$\frac{2}{c_1^B} = \frac{1}{p_2 c_2^B} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1^B = 2p_2 c_2^B.$$

En comparant les biens 1 et 3,

$$\frac{2}{c_1^B} = \frac{1}{p_3 c_3^B} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1^B = 2p_3 c_3^B.$$

En comparant les biens 1 et 4,

$$\frac{2}{c_1^B} = \frac{1}{p_4 c_4^B} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1^B = 2p_4 c_4^B.$$

On en déduit

$$c_2^B = \frac{c_1^B}{2p_2}, \qquad c_3^B = \frac{c_1^B}{2p_3}, \qquad c_4^B = \frac{c_1^B}{2p_4}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire

$$c_1^B + p_2 c_2^B + p_3 c_3^B + p_4 c_4^B = 100 + 100p_4.$$

Cela donne

$$c_1^B + \frac{1}{2}c_1^B + \frac{1}{2}c_1^B + \frac{1}{2}c_1^B = 100 + 100p_4.$$

Donc

$$\frac{5}{2}c_1^B = 100 + 100p_4.$$

On en déduit

$$c_1^B = 40 + 40p_4.$$

Puis

$$\begin{aligned} c_2^B &= \frac{40 + 40p_4}{2p_2} = \frac{20}{p_2} + 20\frac{p_4}{p_2}, \\ c_3^B &= \frac{40 + 40p_4}{2p_3} = \frac{20}{p_3} + 20\frac{p_4}{p_3}, \\ c_4^B &= \frac{40 + 40p_4}{2p_4} = \frac{20}{p_4} + 20. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^B = 40 + 40p_4,}$$

$$\boxed{c_2^B = \frac{20}{p_2} + 20\frac{p_4}{p_2},}$$

$$\boxed{c_3^B = \frac{20}{p_3} + 20\frac{p_4}{p_3},}$$

$$\boxed{c_4^B = \frac{20}{p_4} + 20.}$$

Agent C. L'agent C a pour utilité

$$U_C = \ln(c_1^C) + \ln(c_2^C) + 2\ln(c_3^C) + \ln(c_4^C).$$

Étape 1 : utilités marginales. On a

$$\mathrm{Um}_1^C = \frac{1}{c_1^C}, \qquad \mathrm{Um}_2^C = \frac{1}{c_2^C}, \qquad \mathrm{Um}_3^C = \frac{2}{c_3^C}, \qquad \mathrm{Um}_4^C = \frac{1}{c_4^C}.$$

Étape 2 : conditions marginales. À l'optimum intérieur,

$$\frac{1}{c_1^C} = \frac{1}{p_2 c_2^C} = \frac{2}{p_3 c_3^C} = \frac{1}{p_4 c_4^C}.$$

En comparant les biens 1 et 2,

$$\frac{1}{c_1^C} = \frac{1}{p_2 c_2^C} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1^C = p_2 c_2^C.$$

En comparant les biens 1 et 3,

$$\frac{1}{c_1^C} = \frac{2}{p_3 c_3^C} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1^C = \frac{1}{2} p_3 c_3^C.$$

En comparant les biens 1 et 4,

$$\frac{1}{c_1^C} = \frac{1}{p_4 c_4^C} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1^C = p_4 c_4^C.$$

On en déduit

$$c_2^C = \frac{c_1^C}{p_2}, \qquad c_3^C = \frac{2c_1^C}{p_3}, \qquad c_4^C = \frac{c_1^C}{p_4}.$$

On remplace dans la contrainte budgétaire

$$c_1^C + p_2 c_2^C + p_3 c_3^C + p_4 c_4^C = 200 p_3 + 100 p_4.$$

Cela donne

$$c_1^C + c_1^C + 2c_1^C + c_1^C = 200 p_3 + 100 p_4.$$

Donc

$$5c_1^C = 200 p_3 + 100 p_4.$$

On en déduit

$$c_1^C = 40 p_3 + 20 p_4.$$

Puis

$$c_2^C = \frac{40p_3 + 20p_4}{p_2} = 40\frac{p_3}{p_2} + 20\frac{p_4}{p_2},$$

$$c_3^C = \frac{2(40p_3 + 20p_4)}{p_3} = 80 + 40\frac{p_4}{p_3},$$

$$c_4^C = \frac{40p_3 + 20p_4}{p_4} = 40\frac{p_3}{p_4} + 20.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_1^C = 40p_3 + 20p_4,}$$

$$\boxed{c_2^C = 40\frac{p_3}{p_2} + 20\frac{p_4}{p_2},}$$

$$\boxed{c_3^C = 80 + 40\frac{p_4}{p_3},}$$

$$\boxed{c_4^C = 40\frac{p_3}{p_4} + 20.}$$

Remarque importante. Les parts budgétaires sont :

$$A : \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \qquad B : \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \qquad C : \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Les trois agents consacrent donc tous la même part de leur revenu :

$$\frac{1}{5}$$

au bien 2, et

$$\frac{1}{5}$$

au bien 4. En revanche, les parts consacrées aux biens 1 et 3 diffèrent.

4. Pourquoi les biens 2 et 4 s'agrègent-ils, mais pas les biens 1 et 3 ? Étape 1 : revenu total de l'économie. La dotation agrégée est

$$\bar{\omega} = \omega^A + \omega^B + \omega^C = (100, 100, 200, 200).$$

Sa valeur est

$$M(p) = p \cdot \bar{\omega} = 100 + 100p_2 + 200p_3 + 200p_4.$$

Étape 2 : bien 2. Les trois agents consacrent la part

$$\frac{1}{5}$$

de leur revenu au bien 2. La demande agrégée du bien 2 vaut donc

$$C_2(p) = \frac{1}{5}\frac{m_A}{p_2} + \frac{1}{5}\frac{m_B}{p_2} + \frac{1}{5}\frac{m_C}{p_2} = \boxed{\frac{1}{5}\frac{M(p)}{p_2}.}$$

Étape 3 : bien 4. De même, les trois agents consacrent la part

$$\frac{1}{5}$$

de leur revenu au bien 4. La demande agrégée du bien 4 vaut donc

$$C_4(p) = \frac{1}{5}\frac{M(p)}{p_4}.$$

Ainsi,

$$\boxed{C_4(p) = \frac{1}{5}\frac{M(p)}{p_4}.}$$

Étape 4 : biens 1 et 3. Pour le bien 1, les parts budgétaires sont

$$\frac{2}{5} \text{ pour } A, \qquad \frac{2}{5} \text{ pour } B, \qquad \frac{1}{5} \text{ pour } C.$$

La demande agrégée du bien 1 dépend donc de la répartition des revenus entre le groupe $\{A, B\}$ et l'agent C.

Pour le bien 3, les parts budgétaires sont

$$\frac{1}{5} \text{ pour } A, \qquad \frac{1}{5} \text{ pour } B, \qquad \frac{2}{5} \text{ pour } C.$$

Là encore, la demande agrégée dépend de la répartition des revenus.

Conclusion. Les biens 2 et 4 ont des demandes agrégées de type *agent représentatif*, car tous les agents leur consacrent la même part de revenu. Ce n'est pas le cas des biens 1 et 3.

5. Conditions d'équilibre général et détermination des prix d'équilibre. Étape 1 : ressources agrégées. On a

$$\bar{\omega} = (100, 100, 200, 200).$$

Les conditions d'équilibre sont donc

$$C_1(p) = 100, \qquad C_2(p) = 100, \qquad C_3(p) = 200, \qquad C_4(p) = 200.$$

Rappel sur la loi de Walras. Comme il y a quatre biens, une des quatre équations de marché est redondante. Il suffit donc d'en résoudre trois.

Étape 2 : utiliser les marchés des biens 2 et 4.

Comme on l'a montré,

$$C_2(p) = \frac{1}{5}\frac{M(p)}{p_2}, \qquad C_4(p) = \frac{1}{5}\frac{M(p)}{p_4}.$$

L'équilibre sur le bien 2 donne

$$\frac{1}{5}\frac{M(p)}{p_2} = 100.$$

Donc

$$\boxed{M(p) = 500p_2.}$$

L'équilibre sur le bien 4 donne

$$\frac{1}{5}\frac{M(p)}{p_4} = 200.$$

Donc

$$\boxed{M(p) = 1000p_4.}$$

En comparant les deux expressions de $M(p)$, on obtient

$$500p_2 = 1000p_4,$$

soit

$$\boxed{p_2 = 2p_4.}$$

Étape 3 : utiliser l'identité de revenu total. Par définition,

$$M(p) = 100 + 100p_2 + 200p_3 + 200p_4.$$

Comme $M(p) = 500p_2$, on obtient

$$500p_2 = 100 + 100p_2 + 200p_3 + 200p_4.$$

Donc

$$400p_2 = 100 + 200p_3 + 200p_4.$$

Or

$$p_4 = \frac{p_2}{2}.$$

Donc

$$400p_2 = 100 + 200p_3 + 100p_2.$$

Ainsi,

$$300p_2 = 100 + 200p_3.$$

En divisant par 100,

$$\boxed{3p_2 = 1 + 2p_3.}$$

Étape 4 : utiliser le marché du bien 1.

La demande agrégée du bien 1 vaut

$$C_1(p) = c_1^A + c_1^B + c_1^C.$$

En remplaçant par les expressions trouvées plus haut,

$$C_1(p) = 40p_2 + (40 + 40p_4) + (40p_3 + 20p_4).$$

Donc

$$C_1(p) = 40 + 40p_2 + 40p_3 + 60p_4.$$

À l'équilibre, on doit avoir

$$40 + 40p_2 + 40p_3 + 60p_4 = 100.$$

Donc

$$40p_2 + 40p_3 + 60p_4 = 60.$$

Comme

$$p_4 = \frac{p_2}{2},$$

on obtient

$$40p_2 + 40p_3 + 30p_2 = 60.$$

Ainsi,

$$70p_2 + 40p_3 = 60.$$

En divisant par 10,

$$\boxed{7p_2 + 4p_3 = 6.}$$

Étape 5 : résolution du système.

Nous devons résoudre

$$\begin{cases} 3p_2 = 1 + 2p_3, \\ 7p_2 + 4p_3 = 6. \end{cases}$$

À partir de la première équation,

$$2p_3 = 3p_2 - 1.$$

Donc

$$4p_3 = 6p_2 - 2.$$

En reportant dans la seconde équation :

$$7p_2 + (6p_2 - 2) = 6.$$

Ainsi,

$$13p_2 = 8.$$

On en déduit

$$\boxed{p_2^* = \frac{8}{13}.}$$

Puis

$$p_4^* = \frac{p_2^*}{2} = \frac{4}{13}.$$

Enfin, à partir de

$$3p_2 = 1 + 2p_3,$$

on obtient

$$3 \cdot \frac{8}{13} = 1 + 2p_3.$$

Donc

$$\frac{24}{13} - 1 = 2p_3.$$

Ainsi,

$$\frac{11}{13} = 2p_3.$$

D'où

$$\boxed{p_3^* = \frac{11}{26}.}$$

Conclusion. Les prix d'équilibre sont

$$\boxed{(p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*) = \left(1, \frac{8}{13}, \frac{11}{26}, \frac{4}{13}\right).}$$

6. Allocation d'équilibre. Il suffit de remplacer les prix d'équilibre dans les demandes individuelles.

Agent A. On a

$$c_1^{A*} = 40p_2^* = 40 \cdot \frac{8}{13} = \frac{320}{13},$$

$$c_2^{A*} = 20,$$

$$c_3^{A*} = 20\frac{p_2^*}{p_3^*} = 20\frac{8/13}{11/26} = 20 \cdot \frac{16}{11} = \frac{320}{11},$$

$$c_4^{A*} = 20\frac{p_2^*}{p_4^*} = 20\frac{8/13}{4/13} = 20 \cdot 2 = 40.$$

Donc

$$\boxed{c^{A*} = \left(\frac{320}{13}, 20, \frac{320}{11}, 40\right).}$$

Agent B. On a

$$c_1^{B*} = 40 + 40p_4^* = 40 + 40 \cdot \frac{4}{13} = 40 + \frac{160}{13} = \frac{680}{13},$$

$$c_2^{B*} = \frac{20}{p_2^*} + 20\frac{p_4^*}{p_2^*} = 20 \cdot \frac{13}{8} + 20 \cdot \frac{1}{2} = \frac{65}{2} + 10 = \frac{85}{2},$$

$$c_3^{B*} = \frac{20}{p_3^*} + 20\frac{p_4^*}{p_3^*} = 20 \cdot \frac{26}{11} + 20 \cdot \frac{8}{11} = \frac{520}{11} + \frac{160}{11} = \frac{680}{11},$$

$$c_4^{B*} = \frac{20}{p_4^*} + 20 = 20 \cdot \frac{13}{4} + 20 = 65 + 20 = 85.$$

Donc

$$\boxed{c^{B*} = \left(\frac{680}{13}, \frac{85}{2}, \frac{680}{11}, 85\right).}$$

Agent C. On a

$$c_1^{C*} = 40p_3^* + 20p_4^* = 40 \cdot \frac{11}{26} + 20 \cdot \frac{4}{13} = \frac{220}{13} + \frac{80}{13} = \frac{300}{13},$$

$$c_2^{C*} = 40\frac{p_3^*}{p_2^*} + 20\frac{p_4^*}{p_2^*} = 40 \cdot \frac{11/26}{8/13} + 20 \cdot \frac{1}{2} = 40 \cdot \frac{11}{16} + 10 = \frac{55}{2} + 10 = \frac{75}{2},$$

$$c_3^{C*} = 80 + 40\frac{p_4^*}{p_3^*} = 80 + 40 \cdot \frac{8}{11} = 80 + \frac{320}{11} = \frac{1200}{11},$$

$$c_4^{C*} = 40\frac{p_3^*}{p_4^*} + 20 = 40 \cdot \frac{11/26}{4/13} + 20 = 40 \cdot \frac{11}{8} + 20 = 55 + 20 = 75.$$

Donc

$$\boxed{c^{C*} = \left(\frac{300}{13}, \frac{75}{2}, \frac{1200}{11}, 75\right).}$$

Vérification des marchés. Pour le bien 1,

$$\frac{320}{13} + \frac{680}{13} + \frac{300}{13} = \frac{1300}{13} = 100.$$

Pour le bien 2,

$$20 + \frac{85}{2} + \frac{75}{2} = 20 + \frac{160}{2} = 100.$$

Pour le bien 3,

$$\frac{320}{11} + \frac{680}{11} + \frac{1200}{11} = \frac{2200}{11} = 200.$$

Pour le bien 4,

$$40 + 85 + 75 = 200.$$

Tous les marchés sont bien équilibrés.

7. Effet d'un transfert monétaire T de C vers A. On met en place un transfert monétaire de montant T au profit de A, au détriment de C.

Les nouveaux revenus deviennent :

$$m'_A = 100p_2 + T, \qquad m'_B = 100 + 100p_4, \qquad m'_C = 200p_3 + 100p_4 - T.$$

Le revenu total de l'économie ne change pas :

$$M(p) = m'_A + m'_B + m'_C = 100 + 100p_2 + 200p_3 + 200p_4.$$

Étape 1 : marchés des biens 2 et 4.

Comme les trois agents continuent à consacrer la même part

$$\frac{1}{5}$$

de leur revenu au bien 2 et au bien 4, les demandes agrégées de ces biens conservent les formes

$$C_2(p) = \frac{1}{5}\frac{M(p)}{p_2}, \qquad C_4(p) = \frac{1}{5}\frac{M(p)}{p_4}.$$

Les équilibres des marchés 2 et 4 donnent donc encore

$$M(p) = 500p_2, \qquad M(p) = 1000p_4.$$

Par conséquent,

$$\boxed{p_2 = 2p_4.}$$

En combinant avec

$$M(p) = 100 + 100p_2 + 200p_3 + 200p_4,$$

on obtient comme précédemment

$$500p_2 = 100 + 100p_2 + 200p_3 + 200p_4.$$

Puis, en remplaçant p_4 par $p_2/2$,

$$300p_2 = 100 + 200p_3.$$

Ainsi,

$$\boxed{3p_2 = 1 + 2p_3.}$$

Étape 2 : marché du bien 1.

Avec le transfert, la demande agrégée du bien 1 vaut

$$C_1(p) = \frac{2}{5}m'_A + \frac{2}{5}m'_B + \frac{1}{5}m'_C.$$

En remplaçant par les nouveaux revenus :

$$C_1(p) = \frac{2}{5}(100p_2 + T) + \frac{2}{5}(100 + 100p_4) + \frac{1}{5}(200p_3 + 100p_4 - T).$$

Développons terme à terme :

$$C_1(p) = 40p_2 + \frac{2T}{5} + 40 + 40p_4 + 40p_3 + 20p_4 - \frac{T}{5}.$$

Donc

$$C_1(p) = 40 + 40p_2 + 40p_3 + 60p_4 + \frac{T}{5}.$$

L'équilibre du marché du bien 1 impose

$$40 + 40p_2 + 40p_3 + 60p_4 + \frac{T}{5} = 100.$$

Donc

$$40p_2 + 40p_3 + 60p_4 = 60 - \frac{T}{5}.$$

En remplaçant p_4 par $p_2/2$, on obtient

$$40p_2 + 40p_3 + 30p_2 = 60 - \frac{T}{5}.$$

Ainsi,

$$70p_2 + 40p_3 = 60 - \frac{T}{5}.$$

En divisant par 10,

$$\boxed{7p_2 + 4p_3 = 6 - \frac{T}{50}.}$$

Étape 3 : résolution du système.

Nous devons résoudre

$$\begin{cases} 3p_2 = 1 + 2p_3, \\ 7p_2 + 4p_3 = 6 - \dfrac{T}{50}. \end{cases}$$

De la première équation,

$$2p_3 = 3p_2 - 1,$$

donc

$$4p_3 = 6p_2 - 2.$$

En substituant dans la seconde équation :

$$7p_2 + (6p_2 - 2) = 6 - \frac{T}{50}.$$

Ainsi,

$$13p_2 = 8 - \frac{T}{50}.$$

On en déduit

$$\boxed{p_2^*(T) = \frac{8}{13} - \frac{T}{650}.}$$

Comme

$$p_4 = \frac{p_2}{2},$$

on obtient

$$\boxed{p_4^*(T) = \frac{4}{13} - \frac{T}{1300}.}$$

Enfin, à partir de

$$3p_2 = 1 + 2p_3,$$

on obtient

$$2p_3 = 3p_2 - 1 = 3\left(\frac{8}{13} - \frac{T}{650}\right) - 1.$$

Donc

$$2p_3 = \frac{24}{13} - \frac{3T}{650} - 1 = \frac{11}{13} - \frac{3T}{650}.$$

D'où

$$\boxed{p_3^*(T) = \frac{11}{26} - \frac{3T}{1300}.}$$

Condition de positivité des prix. Il faut en particulier

$$p_3^*(T) > 0.$$

Cela donne

$$\frac{11}{26} - \frac{3T}{1300} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T < \frac{550}{3}.$$

Les conditions

$$p_2^*(T) > 0 \qquad \text{et} \qquad p_4^*(T) > 0$$

sont moins restrictives. Il suffit donc de supposer

$$\boxed{T < \frac{550}{3}.}$$

Commentaire économique.

Le transfert de revenu vers A modifie la demande agrégée parce que A et C n'ont pas les mêmes parts budgétaires pour les biens 1 et 3.

En effet :

— A consacre
$$\frac{2}{5}$$
de son revenu au bien 1, alors que C n'y consacre que
$$\frac{1}{5};$$

— inversement, C consacre
$$\frac{2}{5}$$

de son revenu au bien 3, alors que A n'y consacre que

$$\frac{1}{5}.$$

En revanche, les deux agents consacrent la même part

$$\frac{1}{5}$$

de leur revenu aux biens 2 et 4. La demande agrégée de ces biens, pour un vecteur de prix donné, n'est donc pas directement modifiée par le transfert.

Toutefois, le marché du bien 1 est modifié. Comme le bien 1 est le numéraire, la hausse de sa demande relative se traduit par une baisse des prix des autres biens relativement à lui. On observe bien, à partir des formules obtenues, que

$$p_2^*(T), \qquad p_3^*(T), \qquad p_4^*(T)$$

sont tous décroissants en T.

La baisse est plus forte pour p_3 que pour p_2 ou p_4, ce qui s'explique par le fait que le transfert réduit précisément la demande relative du bien 3, puisque le revenu est déplacé d'un agent qui y consacre une part élevée vers un agent qui y consacre une part plus faible.

Réponse finale.

Contraintes budgétaires :

$$c_1^A + p_2c_2^A + p_3c_3^A + p_4c_4^A = 100p_2,$$
$$c_1^B + p_2c_2^B + p_3c_3^B + p_4c_4^B = 100 + 100p_4,$$
$$c_1^C + p_2c_2^C + p_3c_3^C + p_4c_4^C = 200p_3 + 100p_4.$$

Demandes de A :

$$c_1^A = 40p_2, \quad c_2^A = 20, \quad c_3^A = 20\frac{p_2}{p_3}, \quad c_4^A = 20\frac{p_2}{p_4}.$$

Demandes de B :

$$c_1^B = 40 + 40p_4, \quad c_2^B = \frac{20}{p_2} + 20\frac{p_4}{p_2},$$
$$c_3^B = \frac{20}{p_3} + 20\frac{p_4}{p_3}, \quad c_4^B = \frac{20}{p_4} + 20.$$

Demandes de C :

$$c_1^C = 40p_3 + 20p_4, \quad c_2^C = 40\frac{p_3}{p_2} + 20\frac{p_4}{p_2},$$
$$c_3^C = 80 + 40\frac{p_4}{p_3}, \quad c_4^C = 40\frac{p_3}{p_4} + 20.$$

Les biens 2 et 4 s'agrègent, car les trois agents leur consacrent tous la même part budgétaire $\frac{1}{5}$.

Prix d'équilibre initiaux :

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*) = \left(1, \frac{8}{13}, \frac{11}{26}, \frac{4}{13}\right).$$

Allocation d'équilibre :

$$c^{A*} = \left(\frac{320}{13}, 20, \frac{320}{11}, 40\right),$$
$$c^{B*} = \left(\frac{680}{13}, \frac{85}{2}, \frac{680}{11}, 85\right),$$
$$c^{C*} = \left(\frac{300}{13}, \frac{75}{2}, \frac{1200}{11}, 75\right).$$

Après un transfert T de C vers A, les nouveaux prix d'équilibre sont

$$p_2^*(T) = \frac{8}{13} - \frac{T}{650}, \qquad p_3^*(T) = \frac{11}{26} - \frac{3T}{1300}, \qquad p_4^*(T) = \frac{4}{13} - \frac{T}{1300},$$

pour $T < \frac{550}{3}$.

Le transfert augmente la demande relative du bien 1 et réduit celle du bien 3,

ce qui fait baisser tous les autres prix relativement au numéraire, en particulier p_3.